

Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi sui teoremi classici d'integrazione di campi

Si cerchi, in generale, di fare i calcoli richiesti in più modi, sia ricorrendo ai teoremi classici (Gauss-Green, formula di Kelvin-Stokes, ...) che alle definizioni dirette.

1. Disegnare e calcolare, sia direttamente che usando Green, l'area di $A_1 = \{(x, y) : x \leq 0, -3(x+1) \leq y \leq 0\}$ e l'integrale (converge?) $\int_{A_1} \frac{1}{y-1} dx dy$. Stesse domande per $A_2 = \{(x, y) : 2ay \leq x^2 + y^2 \leq 2by, 0 \leq y \leq x \tan \alpha\}$ (con $0 < a < b$ e $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) e $A_3 = \{(x, y) : |x-1| \leq \min\{y+2, 1\}, x \geq y^2 + 3y + 2\}$.
2. Nel piano (x, y) siano γ_1, γ_2 e γ_3 i cammini da $O(0, 0)$ a $A(3, 3)$ rispettivamente lungo il segmento, lungo l'arco di parabola $y(y-2) = x$ e lungo l'arco di circonferenza passante per $(3, 0)$.
 - (a) Dato il campo $F(x, y) = (3xy - y^2, x^2 + 2y)$ calcolare $\int_{\gamma_j} F \cdot d\ell$ per $j = 1, 2, 3$, e dedurre che F non è conservativo (si poteva vederlo più rapidamente?). Trovare poi le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $G(x, y) = F(x, y) + (0, \varphi(x, y))$ diventi conservativo.
 - (b) Detta D la porzione di piano racchiusa tra γ_1 e γ_2 , verificare la formula di Green per F e D . Infine, scelta una $\varphi(x, y)$ come sopra, calcolare gli integrali di linea $\int_{\gamma_j} G \cdot d\ell$ per $j = 1, 2, 3$.
3. Nel piano verticale (x, z) si disegni $B = \{z \geq \frac{1}{2a}x^2 - a, |z| \leq \frac{1}{2}x\}$, ove $a > 0$.
 - (a) Calcolare area e baricentro di B , e il volume del solido D ottenuto ruotando B di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario attorno all'asse z .
 - (b) Sia S la superficie esterna di D , e sia S' la parte di S ottenuta ruotando l'arco di parabola. Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x - z, y, 0)$ attraverso S, B e S' ; se si vuole, calcolare anche il flusso attraverso le altre porzioni di superficie che costituiscono S .
 - (c) Calcolare la circuitazione di F lungo ∂B e $\partial S'$, se possibile in due modi.
4. Nel piano orizzontale (x, y) sia C la cardioide $\{(r, \theta) : r \leq 2a(1 + \cos \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$, ove $a > 0$.
 - (a) Disegnata C , calcolarne l'area (sia direttamente che con Green) e la lunghezza del bordo.
 - (b) Dato $b > 0$, sia U la porzione con $0 \leq z \leq b$ del cono di base C e vertice $(0, 0, 2b)$. Mostrare che U è compatto, e calcolarne volume, baricentro e (per quanto possibile) l'area esterna.
 - (c) Calcolare il flusso uscente del campo $F(x, y, z) = (-y + z, -x - z, x)$ attraverso tutta la superficie esterna di U , la superficie laterale S e ciascuna delle due basi C (bassa) e C' (alta). Verificare poi la validità della formula di Kelvin-Stokes per S e F .
5. Disegnare i seguenti solidi D , calcolarne il volume ed esprimere il flusso uscente da $S = \partial D$ di un campo vettoriale $A = (A_x, A_y, A_z)$ sia con calcolo diretto che col teorema di Gauss, esaminando e commentando poi i casi particolari in cui $A_1 = \frac{1}{3}(x, y, z)$ oppure $A_2 = (a, b, c)$ (costante).
 - (a) $D_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \min\{z, 2(6 - z)\}\}$.
 - (b) D_2 : il settore sferico centrato in $O(0, 0, 0)$ di raggio R e semiapertura $\alpha \in [0, \pi]$ lungo z .
 - (c) $D_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2}), z \geq 0\}$, con $a > 0$.
 - (d) $D_4 = \{(x, y, z) : \frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$, ove $a, c > 0$.

Soluzioni.

1. (Figura 1) L'area del triangolo A_1 è ovviamente $\frac{3}{2}$. Con Green (secondo cui $\int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy = \int_{\partial D} (f dx + g dy)$ per ogni coppia di funzioni (f, g) di classe C^1 in un aperto contenente D) si ha ad esempio $\text{Area}(A_1) = \oint_{\partial A_1} x dy$, ove il circuito ∂A_1 è percorso in verso antiorario, e lo pensiamo ottenuto, a partire da $O(0,0)$, come giunzione dei cammini ψ_1 (segmento orizzontale $(-x, 0)$ con $0 \leq x \leq 1$), ψ_2 (segmento obliquo $(x, -3x - 3)$ con $-1 \leq x \leq 0$) e ψ_3 (segmento verticale $(0, y)$ con $-3 \leq y \leq 0$). Vale $\int_{\psi_1} x dy = \int_{\psi_3} x dy = 0$ e $\int_{\psi_2} x dy = \int_{-1}^0 x(-3 dx) = (-\frac{3}{2}x^2)_{-1}^0 = \frac{3}{2}$, da cui si riottiene $\oint_{\partial A_1} x dy = \int_{\psi_1} x dy + \int_{\psi_2} x dy + \int_{\psi_3} x dy = \frac{3}{2}$. L'integrale $\int_{A_1} \frac{1}{y-1} dx dy$ esiste finito (e negativo) perché $\frac{1}{y-1}$ è continua (e negativa) sul compatto A_1 ; e per Fubini vale $\int_{-3}^0 dy \int_{-\frac{1}{3}y-1}^{\frac{1}{y-1}} dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^0 \frac{y+3}{y-1} dy = (\frac{1}{3}(y+4 \log|y-1|))_{-3}^0 = (0) - (\frac{1}{3}(-3+8 \log 2)) = -(\frac{8}{3} \log 2 - 1)$. Volendo usare Green, per ottenere il nostro integrale doppio $\int_{A_1} \frac{1}{y-1} dx dy$ basta scegliere $(f, g) = (0, \frac{x}{y-1})$, ottenendo dunque $\int_{A_1} \frac{1}{y-1} dx dy = \int_{\partial A_1} \frac{x}{y-1} dy$. Si ha ancora $\int_{\psi_1} \frac{x}{y-1} dy = \int_{\psi_3} \frac{x}{y-1} dy = 0$, mentre $\int_{\psi_2} \frac{x}{y-1} dy = \int_{-1}^0 \frac{x}{-3x-3} (-3 dx) = 3 \int_{-1}^0 \frac{x}{3x+4} dx = -(\frac{8}{3} \log 2 - 1)$, col che si riottiene il risultato precedente. • In coordinate polari si ha $A_2 = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \alpha, 2a \sin \theta \leq r \leq 2b \sin \theta\}$, dunque (usando l'espressione dell'area in coordinate polari $\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_2(\theta)^2 - r_1(\theta)^2) d\theta$) si ottiene $\text{Area}(A_2) = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (4b^2 \sin^2 \theta - 4a^2 \sin^2 \theta) d\theta = 2(b^2 - a^2) \int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta = 2(b^2 - a^2)(\frac{1}{2}(\theta - \sin \theta \cos \theta))_0^\alpha = (b^2 - a^2)(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$. Con Green si ha $\text{Area}(A_2) = \oint_{\partial A_2} x dy$, ove il circuito ∂A_2 è percorso in verso antiorario, e lo pensiamo ottenuto, a partire da $O(0,0)$, come giunzione di γ_1 (arco di circonferenza grande, dato da $(2b \sin \theta \cos \theta, 2b \sin^2 \theta)$ con $0 \leq \theta \leq \alpha$), γ_2 (segmento, dato dal cammino inverso di $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ con $2a \sin \alpha \leq r \leq 2b \sin \alpha$: una volta calcolato l'integrale della forma $x dy$ basterà cambiare segno al risultato) e γ_3 (arco di circonferenza piccola che torna in O , ottenuto dal cammino inverso di $(2a \sin \theta \cos \theta, 2a \sin^2 \theta)$ con $0 \leq \theta \leq \alpha$). Vale $\int_{\gamma_1} x dy = \int_0^\alpha 2b \sin \theta \cos \theta 4b \sin \theta \cos \theta d\theta = 2b^2 \int_0^\alpha \sin^2 2\theta d\theta = b^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha)$; similmente si avrà allora $\int_{\gamma_3} x dy = -a^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha)$; e $\int_{\gamma_2} x dy = -\int_{2a \sin \alpha}^{2b \sin \alpha} r \cos \alpha \sin \alpha dr = -2(b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \alpha$, da cui si riottiene $\oint_{\partial A_2} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy + \int_{\gamma_3} x dy = (b^2 - a^2)(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$. Passiamo ora all'integrale doppio $\int_{A_2} \frac{1}{y-1} dx dy$, che per Tonelli esisterà finito se (e solo se) esisterà finito l'integrale iterato $\int_0^2 dx \int_{(A_2)_x} \frac{1}{|y-1|} dy$, ove $(A_2)_x$ denota la x -sezione di A_2 sopra $x \in \pi_1(A_2) = [0, 2]$. Ma tale integrale diverge perché la funzione positiva $\frac{1}{|y-1|}$ non è integrabile (alla Riemann in senso generalizzato, dunque alla Lebesgue) in $y = 1$. Nemmeno il teorema di Green ha senso in questo caso: infatti, per poterlo applicare, le funzioni f e g dovrebbero esistere ed essere di classe C^1 in tutto un intorno aperto di A_2 , cosa che nel nostro caso non è possibile (le funzioni f e g dovrebbero essere scelte di modo che $\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y-1}$).^(*) • Integrando per fili paralleli all'asse x si ottiene $\text{Area}(A_3) = \int_{A_3} dx dy = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-y-1}^{y+3} dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^2+3y+2}^2 dx = \int_{-2}^{-1} (y+3 - (-y-1)) dy + \int_{-1}^0 (2 - (y^2+3y+2)) dy = (y^2+4y)_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2)_{-1}^0 = \frac{13}{6}$. Con Green si ha $\text{Area}(A_3) = \oint_{\partial A_3} x dy$, ove il circuito ∂A_3 lo pensiamo ottenuto, a partire da $(0, -1)$ girando in verso antiorario, come giunzione di quattro cammini: parametrizzando tali cammini con y si ha allora $\text{Area}(A_3) = \int_{-1}^{-2} (-y-1) dy + \int_{-2}^{-1} (y+3) dy + \int_{-1}^0 2 dy + \int_0^{-1} (y^2+3y+2) dy = \frac{13}{6}$. Passando poi all'integrale $\int_{A_3} \frac{1}{y-1} dx dy$, come per A_1 esso esiste finito (e negativo) perché $\frac{1}{y-1}$ è continua (e negativa) sul compatto A_3 ; e per Fubini vale $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-y-1}^{y+3} \frac{1}{y-1} dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^2+3y+2}^2 \frac{1}{y-1} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{(y+3)-(-y-1)}{y-1} dy + \int_{-1}^0 \frac{(2)-(y^2+3y+2)}{y-1} dy = (2y+6 \log|y-1|)_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{2}y^2 - 4y - 4 \log|y-1|)_{-1}^0 = -(\frac{3}{2} + 6 \log 3 - 10 \log 2)$. Volendo usare Green, similmente a prima si tratta di calcolare $\int_{-1}^{-2} \frac{-y-1}{y-1} dy + \int_{-2}^{-1} \frac{y+3}{y-1} dy + \int_{-1}^0 \frac{2}{y-1} dy + \int_0^{-1} \frac{y^2+3y+2}{y-1} dy$, che dovrebbe ridare il risultato precedente (si omettono questi calcoli).
2. (a) (Figura 2) Che il campo $F(x, y) = (3xy - y^2, x^2 + 2y)$ non sia conservativo si nota dal fatto che non è irrotazionale, in quanto $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3x - 2y \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x$; comunque si nota anche dalla diversità dei tre integrali di linea, che valgono rispettivamente $\int_{\gamma_1} F \cdot d\ell = \int_0^3 ((3x^2 - x^2)(1) + (x^2 + 2x)(1)) dx = (x^3 + x^2)_0^3 = 36$,

^(*)Questa risoluzione contiene in realtà una falsa presunzione, cioè che A_2 arrivi sempre a tagliare la quota $y = 1$ con un segmento di misura positiva: ciò però non è vero quando $b < \frac{1}{2}$ per ogni α , o quando $b \geq \frac{1}{2}$ ma $\alpha \leq \arccotg(2b-1)$, perché in tali casi A_2 sta tutto sotto tale quota, eventualmente lambendola con un solo vertice nei casi estremali $b \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha = \arccotg(2b-1)$. Se A_2 sta tutto sotto tale quota l'integrale $\int_{A_2} \frac{1}{y-1} dx dy$ esisterà ovviamente finito (perché $\frac{1}{y-1}$ è continua sul compatto A_2) e per Tonelli e Fubini si può calcolare come iterato (perché $\frac{1}{y-1}$ è ivi negativa), ma è di difficile calcolo preciso; i casi estremali $b \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha = \arccotg(2b-1)$ vanno invece esaminati a parte, vedendo se l'integrale iterato converge (esercizio).

- $\int_{\gamma_2} F \cdot d\ell = \int_0^3 ((3y^2(y-2) - y^2)(2y-2) + (y^2(y-2)^2 + 2y)(1)) dy = (\frac{7}{5}y^5 - 6y^4 + 6y^3 + y^2)_0^3 = \frac{126}{5}$
e, in coordinate polari adattate $(x, y) = (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cos \theta, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin \theta)$, $\int_{\gamma_3} F \cdot d\ell = \frac{3}{2}\sqrt{2} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (3(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cos \theta)(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin \theta) - (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin \theta)^2) \cos \theta + ((\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cos \theta)^2 + 2(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin \theta)) \sin \theta d\theta = \dots$
(si omettono ulteriori calcoli). Il campo $G = F + (0, \varphi) = (3xy - y^2, x^2 + 2y + \varphi(x, y))$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque la conservatività equivale a $\frac{\partial G_x}{\partial y} = 3x - 2y = \frac{\partial G_y}{\partial x} = 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, ovvero $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x - 2y$, da cui $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + \psi(y)$ per una qualsiasi $\psi(y)$ di classe C^1 .
- (b) Intendendo nella formula di Green $(f(x, y), g(x, y)) = F(x, y) = (3xy - y^2, x^2 + 2y)$ si ha $\oint_{\partial D} (f dx + g dy) = \int_{\gamma_1} F \cdot d\ell - \int_{\gamma_2} F \cdot d\ell = 36 - \frac{126}{5} = \frac{54}{5}$: si tratta di dimostrare che questo è anche il valore dell'integrale doppio $\int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy = \int_D (2x - (3x - 2y)) dx dy = \int_D (2y - x) dx dy$, che per Fubini vale $\int_0^3 dy \int_{y(y-2)}^y (2y - x) dx = \int_0^3 (2xy - \frac{1}{2}x^2)_{y(y-2)}^y dy = (\frac{10}{3}y^5 - y^4 + \frac{5}{2}y^3)_0^3 = \frac{54}{5}$, come previsto. Scegliamo infine $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy$ (ovvero $\psi(y) = 0$): una primitiva $\alpha(x, y)$ di $G(x, y) = (3xy - y^2, \frac{3}{2}x^2 + 2y - 2xy)$ è data da $(\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}) = (3xy - y^2, \frac{3}{2}x^2 + 2y - 2xy)$, e si ricava $\alpha(x, y) = \frac{3}{2}x^2y - xy^2 + y^2 + k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: pertanto, essendo G conservativo, i tre integrali richiesti $\int_{\gamma_j} G \cdot d\ell$ sono uguali e valgono $\alpha(3, 3) - \alpha(0, 0) = \frac{45}{2}$.
3. (a) (Figura 3) Nel piano (x, z) la parabola $z \geq \frac{1}{2a}x^2 - a$ e il grafico $|z| \leq \frac{1}{2}x$ si incontrano nei punti $(a, -\frac{1}{2}a)$ e $(2a, a)$, dunque si ha $\text{Area}(B) = \int_B dx dz = \int_0^a dx \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x} dz + \int_a^{2a} dx \int_{\frac{1}{2a}x^2 - a}^{\frac{1}{2}x} dz = \int_0^a x dx + \int_a^{2a} (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}x^2 + a) dx = \frac{13}{12}a^2$; in modo simile si ricava $\int_B x dx dz = \frac{9}{8}a^3$ e $\int_B z dx dz = \frac{11}{60}a^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\text{Area}(B)} \int_B x dx dz = \frac{27}{26}a$ e $z_G = \frac{1}{\text{Area}(B)} \int_B z dx dz = \frac{11}{65}a$. Usando Guldino, il volume del solido D ottenuto ruotando B di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario attorno all'asse z è dato da $\text{Vol}(D) = \frac{\pi}{2} x_G \text{Area}(B) = \frac{9\pi}{16}a^3$.
- (b) Per calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x - z, y, 0)$ attraverso S usiamo il teorema di Gauss: essendo $\nabla \cdot F = 1 + 1 + 0 = 2$, il flusso è pari a $\Phi_S(F) = \int_D (\nabla \cdot F) dx dy dz = 2 \text{Vol}(D) = \frac{9\pi}{8}a^3$. Per il flusso attraverso B , notiamo che nel piano $y = 0$ (in cui B è contenuta) il campo F è parallelo all'asse x e dunque a B : perciò $\Phi_B(F) = 0$. Per il flusso attraverso S' usiamo la definizione: parametrizzando S' con $(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{1}{2a}r^2 - a)$ con $a \leq r \leq 2a$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, otteniamo $\Phi_{S'}(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} r \cos \theta - \frac{1}{2a}r^2 + a & \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{a}r & 0 \end{pmatrix} dr = -\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} r^2 (r + (a - \frac{1}{2a}r^2) \cos \theta) dr = -\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{3}(a \cos \theta)r^3 - \frac{1}{10a}(\cos \theta)r^5)_{r=a}^{r=2a} d\theta = -\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{15}{4} - \frac{23}{30} \cos \theta)a^4 d\theta = -(\frac{15\pi}{8} - \frac{23}{30})a^3$. Gli altri flussi di F sono calcolabili sempre attraverso la definizione: per la porzione conica inferiore si avrà la parametrizzazione $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -\frac{1}{2}\rho)$ con $0 \leq \rho \leq a$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; per la porzione conica superiore si avrà $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{1}{2}\rho)$ con $0 \leq \rho \leq 2a$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; per l'altra faccia verticale sul piano $x = 0$ si avrà $(0, y, z)$ con $-\frac{1}{2}y \leq z \leq \frac{1}{2}y$ se $0 \leq y \leq a$, e con $\frac{1}{2a}y^2 - a \leq z \leq \frac{1}{2}y$ se $a \leq y \leq 2a$. Naturalmente alla fine andrà verificato che la somma di tutti i flussi del campo attraverso le singole porzioni dia nuovamente il già calcolato flusso totale del campo attraverso S .
- (c) Converrà usare la formula di Kelvin-Stokes: il rotore di F è $\nabla \times F = (0, -1, 0)$, pertanto $\oint_{\partial B} F \cdot d\ell = \Phi_B(\nabla \times F) = \int_B \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dx dz = \text{Area}(B) = \frac{13}{12}a^2$. Anche col calcolo diretto si ottiene $\oint_{\partial B} F \cdot d\ell = \int_0^a ((x - (-\frac{x}{2}))(1)) dx + \int_a^{2a} ((x - (\frac{1}{2a}x^2 - a))(1)) dx + \int_{2a}^0 ((x - (\frac{x}{2}))(1)) dx = \int_0^a \frac{3}{2}x dx + \int_a^{2a} (x - \frac{1}{2a}x^2 + a) dx + \int_{2a}^0 \frac{x}{2} dx = \frac{13}{12}a^2$. • Sempre con Kelvin-Stokes si ottiene $\oint_{\partial S'} F \cdot d\ell = \Phi_{S'}(\nabla \times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -r \sin \theta \\ -1 & \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{a}r & 0 \end{pmatrix} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \frac{1}{a}r^2 \sin \theta dr = \frac{1}{a}(-\cos \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3}r^3)_a^{2a} = \frac{7}{3}a^2$. Anche qui si può verificare il risultato col calcolo diretto: le parametrizzazioni del bordo che danno luogo all'orientazione positiva di $\partial S'$ sono (nell'ordine, partendo dal vertice $(2a, 0, a)$): l'arco di circonferenza alta $(2a \cos \theta, 2a \sin \theta, a)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; il segmento parabolico sul piano $x = 0$, dato da $(0, y, \frac{1}{2a}y^2 - a)$ con $a \leq y \leq 2a$, percorso all'inverso; l'arco di circonferenza bassa $(a \cos \theta, a \sin \theta, -\frac{1}{2}a)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, percorso all'inverso; e il segmento parabolico sul piano $y = 0$, dato da $(x, 0, \frac{1}{2a}x^2 - a)$ con $a \leq x \leq 2a$.
4. (a) (Figura 4) L'area della cardiode $C = \{(r, \theta) : r \leq 2a(1 + \cos \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ è data (nella solita formula in coordinate polari) da $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} 4a^2(\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta))_0^{2\pi} = 6\pi a^2$; con Green si ritrova $\oint_{\partial C} x dy = \int_0^{2\pi} 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta d(2a(1 + \cos \theta) \sin \theta) = 4a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) \cos \theta (\cos \theta + \cos 2\theta) d\theta = 4a^2 \int_0^{2\pi} (2 \cos^4 \theta + 3 \cos^3 \theta - \cos \theta) d\theta = 8a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = 8a^2 \frac{1}{4}(\cos^3 \theta \sin \theta + 3 \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2})_0^{2\pi} = 6\pi a^2$. Quanto alla lunghezza del bordo, l'elemento d'arco (sempre in coordinate polari) si scrive come $d\ell = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = 2\sqrt{2}a \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta$, dunque si ha $\int_{\partial C} d\ell = 2\sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 4a \int_0^{2\pi} |\cos \frac{\theta}{2}| d\theta = 8a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 16a$.
- (b) U è compatto perché chiuso (definito da disuguaglianze late di funzioni continue) e limitato (infatti in coordinate cilindriche si ha $r \leq 4a$ e $0 \leq z \leq b$). La z -fetta di U ha dimensioni lineari che decrescono linearmente con z dal valore $2a$ per $z = 0$ al valore 0 per $z = 2b$, dunque il bordo di tale fetta è caratterizzato (sempre in coordinate cilindriche) da $r(\theta, z) = a(2 - \frac{z}{b})(1 + \cos \theta)$: pertanto, rimpiazzando $2a$ con $a(2 - \frac{z}{b})$ nell'area trovata in precedenza, si ha che l'area della z -fetta di U risulta $\frac{3}{2}\pi(2 - \frac{z}{b})^2 a^2$, e il volume di U si trova

integrando in z tale area, dunque $\text{Vol}(U) = \int_0^b \frac{3}{2}\pi(2 - \frac{z}{b})^2 a^2 dz = \frac{7\pi}{2} a^2 b$. Quanto al baricentro, per simmetria si avrà $y_G = 0$; poi $x_G = \frac{2}{7\pi a^2 b} \int_U x dx dy dz = \frac{2}{7\pi a^2 b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dz \int_0^{a(2 - \frac{z}{b})(1 + \cos \theta)} r \cos \theta r dr = \frac{2a}{21\pi b} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta \int_0^b (2 - \frac{z}{b})^3 dz = \frac{75}{56} a$ e $z_G = \frac{2}{7\pi a^2 b} \int_U z dx dy dz = \frac{2}{7\pi a^2 b} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dz \int_0^{a(2 - \frac{z}{b})(1 + \cos \theta)} z r dr = \frac{1}{7\pi b} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \int_0^b z(2 - \frac{z}{b})^2 dz = \frac{11}{28} b$. Infine, vediamo cosa si può dire per la superficie esterna di U . Le aree delle basi sono rispettivamente $6\pi a^2$ (quella inferiore C) e $\frac{3}{2}\pi a^2$ (quella superiore C'). Una parametrizzazione della superficie laterale S di U è data da quella in θ della z -fetta più la coordinata z , ovvero da $(x, y, z) = (r(\theta, z) \cos \theta, r(\theta, z) \sin \theta, z)$: con essa si potrebbe procedere al calcolo dell'area di S con la consueta tecnica dell'integrale superficiale (elemento d'area ecc.), ma i calcoli risultano complicati.

- (c) Per calcolare il flusso uscente $\Phi_{\partial U}(F)$ del campo $F(x, y, z) = (-y + z, -x - z, x)$ attraverso tutta la superficie esterna di U converrà usare il teorema di Gauss: essendo $\nabla \cdot F = 0$ si avrà $\Phi_{\partial U}(F) = \int_U (\nabla \cdot F) dx dy dz = 0$. Il flusso uscente da C è facile da calcolare con la definizione: infatti il versore normale uscente è $-e_3$ e l'elemento d'area è $dx dy$, dunque si ottiene $\Phi_C(F) = \int_C F \cdot (-e_3) dx dy = -\int_C x dx dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \int_0^{a(2 - \frac{z}{b})(1 + \cos \theta)} r \cos \theta r dr = -\frac{8}{3} a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta = -\frac{8}{3} a^3 \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta =$ [eliminando i termini a integrale nullo] $= -\frac{8}{3} a^3 (3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta) = -\frac{8}{3} a^3 (3\pi + \frac{3}{4}\pi) = -10\pi a^3$. Idem per il flusso uscente dalla base superiore C' : il versore normale uscente è e_3 , dunque si ottiene $\Phi_{C'}(F) = \int_{C'} F \cdot e_3 dx dy = \int_{C'} x dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \int_0^{a(1 + \cos \theta)} r \cos \theta r dr = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta = \frac{5}{4} \pi a^3$. A questo punto, essendo $\Phi_{\partial U}(F) = \Phi_S(F) + \Phi_C(F) + \Phi_{C'}(F)$, si ricava subito $\Phi_S(F) = \Phi_{\partial U}(F) - \Phi_C(F) - \Phi_{C'}(F) = 0 - (-10\pi a^3) - (\frac{5}{4}\pi a^3) = \frac{35}{4}\pi a^3$. • Procediamo ora con la verifica della formula di Kelvin-Stokes per S e F . Calcoliamo il flusso uscente di $\nabla \times F$ attraverso S : si ha $\nabla \times F = e_1$, dunque usando la parametrizzazione di S descritta sopra si ricava $\Phi_S(\nabla \times F) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \det \begin{pmatrix} 1 & -a(2 - \frac{z}{b})(1 + 2 \cos \theta) \sin \theta & -\frac{a}{b}(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ 0 & a(2 - \frac{z}{b})(1 - 2 \cos \theta)(1 + \cos \theta) & -\frac{a}{b}(1 + \cos \theta) \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b a(2 - \frac{z}{b})(1 - 2 \cos \theta)(1 + \cos \theta) dz = a \int_0^{2\pi} (-\cos 2\theta - \cos \theta) d\theta \int_0^b (2 - \frac{z}{b}) dz = 0$. D'altra parte il bordo ∂S è costituito dall'unione disgiunta del bordo di C orientato in senso antiorario e del bordo di C' orientato in senso orario. Ora, ∂C è parametrizzata da $(2a(1 + \cos \theta) \cos \theta, 2a(1 + \cos \theta) \sin \theta, 0)$, dunque il vettore tangente è $(2a(-\sin \theta - \sin 2\theta), 2a(\cos \theta + \cos 2\theta), 0)$: pertanto $\int_{\partial C} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} ((-2a(1 + \cos \theta) \sin \theta)(2a(-\sin \theta - \sin 2\theta)) + (-2a(1 + \cos \theta) \cos \theta)(2a(\cos \theta + \cos 2\theta))) d\theta = -4a^2 \int_0^{2\pi} (4 \cos^4 \theta + 6 \cos^3 \theta - \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 1) d\theta = 0$ (infatti $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta = \frac{3\pi}{4}$ e $\int_0^{2\pi} \cos \theta = \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta = 0$). Allo stesso modo si mostra che $\int_{\partial C'} F \cdot d\ell = 0$, dunque $\oint_{\partial S} F \cdot d\ell = \int_{\partial C} F \cdot d\ell - \int_{\partial C'} F \cdot d\ell = 0$, e la formula di Kelvin-Stokes è verificata.

5. (a) (Figura 5) Il solido $D_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \min\{z, 2(6 - z)\}\}$ è la zona compresa tra i due paraboloidi $z = x^2 + y^2$ (sotto) e $z = 6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (sopra). I due paraboloidi si intersecano a quota data da $z = 2(6 - z)$, ovvero $z = 4$, dunque la proiezione di D_1 sul piano orizzontale è il disco $x^2 + y^2 \leq 4$: il volume di D_1 è dato (per fili paralleli all'asse z) da $\int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - \frac{3}{2}r^2) r dr = 2\pi(3r^2 - \frac{3}{8}r^4)|_0^2 = 12\pi$, o alternativamente (per z -fette) da $\int_0^4 z\pi dz + \int_4^6 2(6 - z)\pi dz = 8\pi + 4\pi = 12\pi$. Il flusso del campo vettoriale $A = (A_x, A_y, A_z)$ uscente da ∂D_1 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_1}(A) = \int_{D_1} (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) dx dy dz$; in alternativa, con la definizione diretta, il flusso uscente dalla calotta inferiore è (col segno meno per ottenere la normale uscente) $\Phi_{\partial D_1^-}(A) = -\int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} \det \begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & 2x & 2y \end{pmatrix} \Big|_{z=x^2 + y^2} dx dy = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (2x A_x + 2y A_y - A_z) \Big|_{z=x^2 + y^2} dx dy$, mentre quello uscente dalla calotta superiore è $\Phi_{\partial D_1^+}(A) = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} \det \begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & -x & -y \end{pmatrix} \Big|_{z=6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (x A_x + y A_y + A_z) \Big|_{z=6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy$, e $\Phi_{\partial D_1}(A) = \Phi_{\partial D_1^-}(A) + \Phi_{\partial D_1^+}(A)$. • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x, y, z)$, secondo Gauss tale flusso dovrebbe ricalcolare il volume di D_1 , e infatti si ottiene $\Phi_{\partial D_1}(A_1) = \frac{1}{3} \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2) + x^2 + y^2 + 6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)) dx dy = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\frac{1}{2}r^2 + 2) r dr = 2\pi(\frac{1}{8}r^4 + r^2)|_0^2 = 12\pi$. • Invece per $A_2 = (a, b, c)$, sempre secondo Gauss tale flusso dovrebbe essere nullo, e infatti si trova $\Phi_{\partial D_1}(A_2) = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (2ax + 2by - c + ax + by + c) dx dy = 3 \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} (ax + by) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (ar \cos \theta + br \sin \theta) r dr = 0$.

- (b) (Figura 6) Il volume del settore sferico D_2 è facilmente calcolabile in coordinate sferiche come l'integrale $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos \varphi)R^3$. Il flusso del campo vettoriale $A = (A_x, A_y, A_z)$ uscente da ∂D_2 si può sempre calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_2}(A) = \int_{D_2} (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) dx dy dz$; con la definizione diretta, il flusso uscente dalla superficie sferica superiore è dato dall'integrale $\Phi_{\partial D_2^+}(A) = -\int_{[0, 2\pi] \times [0, \alpha]} \det \begin{pmatrix} A_x & R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ A_y & R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ A_z & 0 & -R \sin \varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi = \int_{[0, 2\pi] \times [0, \alpha]} R^2 \sin \varphi (A_1 \cos \theta \sin \varphi + A_2 \sin \theta \sin \varphi + A_3 \cos \varphi) d\theta d\varphi$, mentre quello uscente dalla superficie conica inferiore (data da $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \cotg \alpha)$) è $\Phi_{\partial D_2^-}(A) = \int_{\{x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha\}} \det \begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cotg \alpha & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} dx dy = -\int_{\{x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha\}} (\frac{\cotg \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x A_1 +$

$y A_2) - A_3) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} ((A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) \cot \alpha - A_3) r dr$. • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x, y, z)$ i flussi diventano $\Phi_{\partial D_2^+}(A_1) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha R^3 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos \varphi)R^3$ e $\Phi_{\partial D_2^-}(A_1) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} (r \cot \alpha - r \cot \alpha) r dr = 0$ (prevedibile, visto che il campo A_1 è parallelo alla superficie conica), dunque il flusso totale è $\Phi_{\partial D_2}(A_1) = \Phi_{\partial D_2^+}(A_1) + \Phi_{\partial D_2^-}(A_1) = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos \varphi)R^3$, che come prescrive Gauss ridà il volume di D_2 . • Invece per $A_2 = (a, b, c)$ i flussi diventano $\Phi_{\partial D_2^+}(A_2) = \int_{[0, 2\pi] \times [0, \alpha]} R^2 \sin \varphi (a \cos \theta \sin \varphi + b \sin \theta \sin \varphi + c \cos \varphi) d\theta d\varphi = \pi c \sin^2 \alpha R^2$ e $\Phi_{\partial D_2^-}(A_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} ((a \cos \theta + b \sin \theta) \cot \alpha - c) r dr = -\pi c \sin^2 \alpha R^2$, dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_2}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.

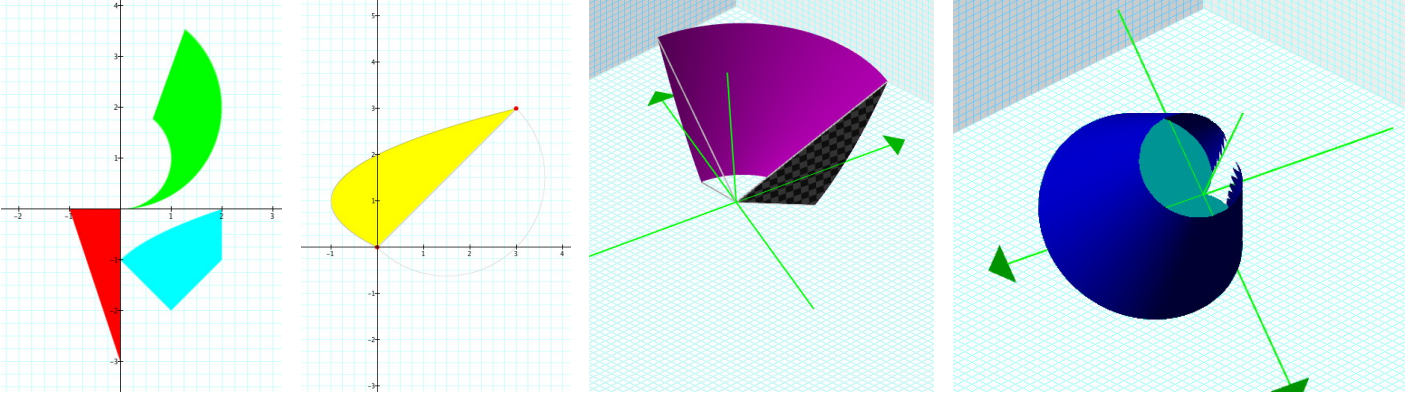
- (c) (Figura 7) Il luogo $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ rappresenta la palla chiusa di centro l'origine e raggio a , mentre il luogo $z = a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2})$ è il paraboloide di z -sezione ellittica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1 - \frac{z}{a}$ (con semiassi rispettivamente $a\sqrt{1 - \frac{z}{a}}$ e $\frac{1}{2}a\sqrt{1 - \frac{z}{a}}$), dunque con area $\frac{1}{2}\pi a^2(1 - \frac{z}{a})$; pertanto il solido $D_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2}), z \geq 0\}$ è fatto dai punti della mezza palla superiore che sono esterni al paraboloide. Il volume di D_3 converrà calcolarlo per differenza: il volume interno al paraboloide si trova integrando l'area della z -sezione tra 0 e a , ovvero $\int_0^a \frac{1}{2}\pi a^2(1 - \frac{z}{a}) dz = \frac{1}{2}\pi a^2(z - \frac{1}{2a}z^2)_0^a = \frac{1}{4}\pi a^3$, pertanto $\text{Vol}(D_3) = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{1}{4}\pi a^3 = \frac{5\pi}{12}a^3$. Come in precedenza, il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x, A_y, A_z)$ uscente da ∂D_3 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_3}(A) = \int_{D_3} (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) dx dy dz$. Con la definizione diretta, dette S_1 la superficie sferica esterna, S_2 la superficie ellittica interna e S_3 la superficie piana di base, si ha che il versore normale uscente per S_1 è $\frac{1}{a}(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$ e l'elemento d'area è $\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$, da cui

$$\Phi_{S_1}(A) = \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2\}} (\frac{x A_1 + y A_2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + A_3) dx dy \text{ oppure, in coordinate sferiche } (\theta, \varphi) \text{ (nelle quali il versore normale uscente per } S_1 \text{ è } (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \text{ e l'elemento d'area è } a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi) \text{ si ha anche } \Phi_{S_1}(A) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A_1 \cos \theta \sin \varphi + A_2 \sin \theta \sin \varphi + A_3 \cos \varphi) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi; \text{ si può poi parametrizzare } S_2 \text{ con } (x, y, a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2})), \text{ da cui } \Phi_{S_2}(A) = - \int_{\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \leq 1\}} \det \begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & -\frac{2x}{a} & -\frac{8y}{a} \end{pmatrix} dx dy = - \int_{\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \leq 1\}} (\frac{2x}{a} A_x + \frac{8y}{a} A_y + A_z) dx dy; \text{ infine il flusso uscente da } S_3 \text{ è dato da } \Phi_{S_3}(A) = - \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \geq 1\}} A_3|_{z=0} dx dy. \bullet$$

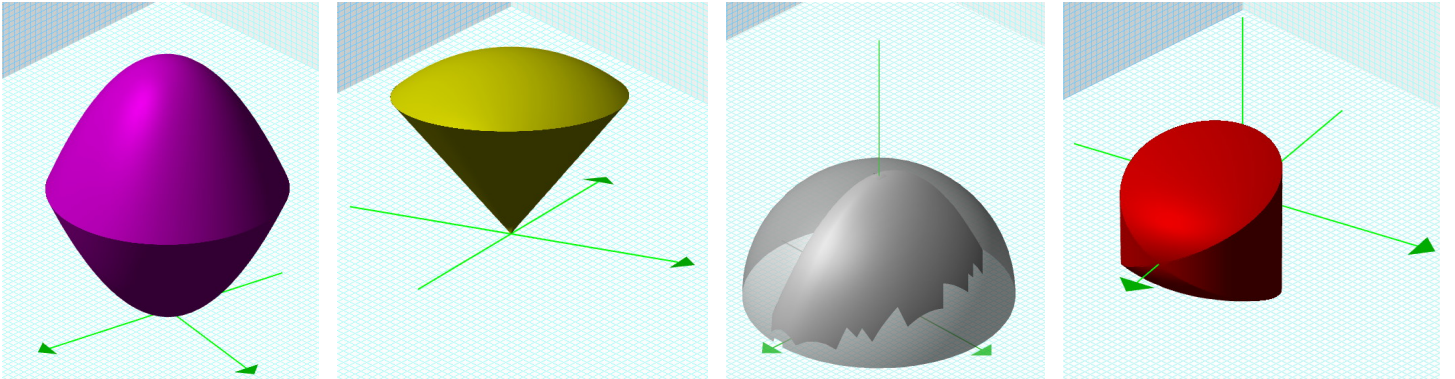
Per $A_1 = \frac{1}{3}(x, y, z)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A_1) = \frac{1}{3} \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2\}} (\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy = \frac{1}{3} \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2\}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = \frac{2\pi}{3} a^2 (-\sqrt{a^2 - r^2})_0^a = \frac{2\pi}{3} a^3$, poi $\Phi_{S_2}(A_1) = -\frac{1}{3} \int_{\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \leq 1\}} (\frac{2x^2}{a} + \frac{8y^2}{a} + a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2})) dx dy = [\text{posto } (x, y) = (a \rho \cos \psi, \frac{1}{2} a \rho \sin \psi)] -\frac{1}{6} a^3 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 (\rho^2 + 1) \rho d\rho = -\frac{1}{3} a^3 \pi (\frac{1}{4}(\rho^2 + 1)^2)_0^1 = -\frac{1}{4} \pi a^3$, e infine $\Phi_{S_3}(A_1) = 0$, così che il flusso totale è $\Phi_S(A_1) = \Phi_{S_1}(A_1) + \Phi_{S_2}(A_1) + \Phi_{S_3}(A_1) = \frac{5\pi}{12} a^3$, che come prescrive Gauss ridà il volume di D_3 . • Invece per $A_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A_2) = \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2\}} (\frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \gamma) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (\frac{\alpha r \cos \theta + \beta r \sin \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \gamma) r dr = [\text{eliminando i termini nulli nell'integrazione in } \theta] \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \gamma r dr = \pi \gamma a^2$, poi $\Phi_{S_2}(A_2) = - \int_{\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \leq 1\}} (\frac{2x}{a} \alpha + \frac{8y}{a} \beta + \gamma) dx dy = - \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 (2\alpha \rho \cos \theta + 4\beta \rho \sin \theta + \gamma) \frac{1}{2} a^2 \rho d\rho = -\frac{1}{2} \pi \gamma a^2$ e $\Phi_{S_3}(A_2) = - \int_{\{x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} \geq 1\}} \gamma dx dy = -\gamma \text{Area}(S_3) = -\frac{1}{2} \pi \gamma a^2$: dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_3}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.

- (d) (Figura 8) Il luogo $\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ rappresenta l'ellissoide di centro l'origine e semiassi rispettivamente $2a, 2a$ e c , mentre il luogo $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ è il cilindro retto di base il cerchio nel piano orizzontale (x, y) di centro $(a, 0, 0)$ e raggio r (cerchio tutto contenuto nell'ellissoide) e illimitato in direzione z : e il solido D_4 è l'intersezione tra i due. Integrando per fili paralleli all'asse z , e notando che in coordinate polari nel piano (x, y) il cerchio $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ è descritto come $0 \leq r \leq 2a \cos \theta$ con $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, si ha che $\text{Vol}(D_4) = \int_{\{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}} (\int_{-\frac{c}{2a} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}^{\frac{c}{2a} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dz) dx dy = \frac{c}{a} \int_{\{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{c}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr = \frac{c}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}})_0^{2a \cos \theta} d\theta = \frac{c}{3a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8a^3 (1 - |\sin \theta|^3) d\theta = \frac{16a^2 c}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{16a^2 c}{3} (\theta + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^2 c}{3} (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$. Come al solito, il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x, A_y, A_z)$ uscente da ∂D_4 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_4}(A) = \int_{D_4} (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) dx dy dz$. Usiamo ora la definizione diretta, chiamando S_1 la porzione di superficie esterna sull'ellissoide e S_2 quella sul cilindro. Parametizziamo la superficie dell'ellissoide usando delle coordinate sferiche adattate, ovvero $(x, y, z) = (2a \cos \theta \sin \varphi, 2a \sin \theta \sin \varphi, c \cos \varphi)$ con $(\theta, \varphi) \in [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$: la condizione $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ diventa allora (fatte le sostituzioni) $\cos \theta \geq \sin \varphi$, ovvero $|\theta| \leq |\arccos(\sin \varphi)| = |\varphi - \frac{\pi}{2}|$, da cui (mettendo il segno per assicurare la normale esterna) $\Phi_{S_1}(A) = - \int_0^\pi d\varphi \int_{-|\varphi - \frac{\pi}{2}|}^{|\varphi - \frac{\pi}{2}|} \det \begin{pmatrix} A_x & -2a \sin \theta \sin \varphi & 2a \cos \theta \cos \varphi \\ A_y & 2a \cos \theta \sin \varphi & 2a \sin \theta \cos \varphi \\ A_z & 0 & -c \sin \varphi \end{pmatrix} d\theta = -2a \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_{-|\varphi - \frac{\pi}{2}|}^{|\varphi - \frac{\pi}{2}|} (c(A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) \sin \varphi + 2a A_z \cos \varphi) d\theta$. Parametrizzando poi la superficie del cilindro in coordinate cilindriche tramite $(x, y, z) = (a(1 + \cos \alpha), a \sin \alpha, z)$ con $(\alpha, z) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, e la

condizione $\frac{x^2+y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ diventa $|z| \leq c\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = c\sin\frac{\alpha}{2}$ (si noti che $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ perché si è scelto $\alpha \in [0, 2\pi]$), da cui $\Phi_{S_2}(A) = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}} \det \begin{pmatrix} A_x & -a\sin\alpha & 0 \\ A_y & a\cos\alpha & 0 \\ A_z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = a \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}} (A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha) dz$ • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x, y, z)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A) = \frac{2}{3}a \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|} (c((2a\cos\theta\sin\varphi)\cos\theta + (2a\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta)\sin\varphi + 2a(c\cos\varphi)\cos\varphi) d\theta = \frac{2}{3}a \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|} 2ac d\theta = \frac{8}{3}a^2c \int_0^\pi |\varphi - \frac{\pi}{2}| \sin\varphi d\varphi =$ [posto $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$] $\frac{8}{3}a^2c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\psi| \cos\psi d\psi = \frac{16}{3}a^2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \cos\psi d\psi = \frac{16}{3}a^2c(\psi \sin\psi + \cos\psi)_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \cos\psi d\psi = \frac{16}{3}a^2c(\frac{\pi}{2}-1)$ e $\Phi_{S_2}(A_1) = \frac{1}{3}a \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}} (a(1+\cos\alpha)\cos\alpha + a\sin^2\alpha) dz = \frac{2}{3}a^2c \int_0^{2\pi} (1+\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{16}{9}a^2c$, così che il flusso totale è $\Phi_{\partial D_4}(A_1) = \Phi_{S_1}(A_1) + \Phi_{S_2}(A_1) = \frac{16a^2c}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$, che per Gauss ridà $\text{Vol}(D_4)$. • Invece per $A_2 = (h, k, l)$ (costante) si ha $\Phi_{S_1}(A_2) = 2a \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|} (c(h\cos\theta + k\sin\theta)\sin\varphi + 2al\cos\varphi) d\theta = 2a \int_0^\pi \sin\varphi (c(h\sin\theta - k\cos\theta)\sin\varphi + 2al\theta\cos\varphi)_{\theta=-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{\theta=|\varphi-\frac{\pi}{2}|} d\varphi = 4a \int_0^\pi (ch\sin|\varphi - \frac{\pi}{2}| \sin\varphi + al|\varphi - \frac{\pi}{2}| \cos\varphi) \sin\varphi d\varphi =$ [posto $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$] $4a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ch\sin|\psi| \cos\psi - al|\psi| \sin\psi) \cos\varphi d\psi =$ [sfruttando le (dis)parità] $8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} ch\sin\psi \cos^2\psi d\psi = 8ach(-\frac{1}{3}\cos^3\psi)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}ach$ e $\Phi_{S_2}(A_2) = a \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}} (h\cos\alpha + k\sin\alpha) dz = 2ac \int_0^{2\pi} (h\cos\alpha + k\sin\alpha) \sin\frac{\alpha}{2} d\alpha =$ [posto $\beta = \frac{\alpha}{2}$] $4ac \int_0^\pi (h(2\cos^2\beta - 1) + 2k\sin\beta\cos\beta) \sin\beta d\beta = 4ac(h(-\frac{2}{3}\cos^3\beta + \cos\beta) + \frac{2}{3}k\sin^3\beta)_0^\pi = -\frac{8}{3}ach$: dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_4}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.



(1) Ex. 1. (2) Ex. 2. (3) Ex. 3. (4) Ex. 4.



(5) Ex. 5a. (6) Ex. 5b. (7) Ex. 5c. (8) Ex. 5d.