

Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi di autoverifica su equazioni differenziali - teoria generale

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2025/26

venerdì 21 novembre 2025

Istruzioni generali. Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento, che sarà fornito lunedì 24/11. Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 16 pt (6+4+6). **Ex. 2:** 16 pt (4+6+6). **Ex. 3:** 16 pt (5+6+5). **Ex. 4:** 18 pt (4+4+5+5). **Ex. 5:** 16 pt (6+4+6). **Ex. 6:** 18 pt (7+4+7). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in due sedute da 3 ore).

1. (*) Sia data l'equazione differenziale $y' = \sin(ty)$.

- (i) Cosa si può dire riguardo esistenza e unicità locale e globale delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se una soluzione si annulla per un certo t_0 , essa è identicamente nulla?
- (ii) Mostrare che le soluzioni sono pari, e che se $\varphi(t)$ è una soluzione lo è anche $-\varphi(t)$.
- (iii) Studiare la crescita delle soluzioni. Il punto $t = 0$ è un estremo locale per esse?

2. Sia data l'equazione differenziale $t \dot{x} = x(\log x - \log t)$.

- (i) Dire per quali dati iniziali è garantita esistenza e unicità locale della soluzione $x(t)$. Sono applicabili i risultati di esistenza e unicità globale?
- (ii) Vi sono soluzioni costanti, o più in generale di tipo lineare $x(t) = at + b$? Dire in quali zone del piano (x, t) le soluzioni sono crescenti e dove sono convesse.
- (iii) Usando il cambio $x(t) = t z(t)$ trovare tutte le soluzioni, e in particolare quella con $x(1) = 1$.

3. È data l'equazione differenziale $y' \sin^3 x = 2y \cos x$ nell'incognita $y(x)$.

- (i) Si può dire a priori dove saranno definite le soluzioni? Per quali $y_0 \in \mathbb{R}$ esisteranno eventualmente soluzioni del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$?
- (ii) Discutere a priori crescita e convessità delle soluzioni. Se $\varphi(x)$ è soluzione, lo è anche $-\varphi$?
- (iii) Trovare tutte le soluzioni, specificando se ve ne sono di definite all'intorno di $x = 0$ o anche su tutto $\mathbb{R}$. Risolvere in particolare il problema di Cauchy con $y(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

4. (*) È data l'equazione differenziale $y'' = y e^{-y^2}$.

(*) Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

- (i) Scrivere il sistema equivalente del primo ordine, e mostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
- (ii) Esprimere l'integrale dell'energia $E(y, y')$, e usarlo per mostrare che ogni soluzione massimale $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha derivata φ' limitata.
- (iii) Determinare i valori dell'energia per cui le soluzioni sono strettamente monotone.
- (iv) Tracciare alcune curve di livello di E , e descrivere qualitativamente le soluzioni non monotone.

5. È data l'equazione differenziale totale $2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0$.

- (i) Trovare tutte le soluzioni, e in particolare quelle per $(0, -1)$. Qual è la loro orbita?
- (ii) Quali sono le soluzioni, nell'incognita $x(y)$, dell'equazione scalare $x' = \frac{3x^2 - y^2}{2xy}$?
- (iii) Trovare la soluzione del sistema autonomo $\begin{cases} x' = 3x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$ tale che $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$.

6. (*) È dato il sistema differenziale $\begin{cases} x' = y^2(1 + x^2) \\ y' = y^2 \end{cases}$.

- (i) Trovare tutte le soluzioni costanti del sistema; determinarne poi un integrale primo, e dire con precisione quali saranno le orbite delle soluzioni, compreso il verso di percorrenza.
- (ii) Dopo aver risolto il problema di Cauchy scalare dato da $y' = y^2$ e $y(0) = b$ al variare di $b \in \mathbb{R}$, dire quali sono le soluzioni del sistema definite su tutto $\mathbb{R}$.
- (iii) Esibire la soluzione del sistema tale che $(x(0), y(0)) = (a, b)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.