La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 129-132

Teoria dei fasci e trasformazioni integrali per $\mathcal{D}$-moduli tra varietà di Grassmann.

CORRADO MARASTONI

1. – Le trasformazioni integrali nel linguaggio di fasci e $\mathcal{D}$-moduli

Date due varietà X e Y, in generale non è dato un morfismo tra esse. Tuttavia, euristicamente parlando, dei dati su X (funzioni, classi di coomologia...) possono essere trasformati in dati su Y tramite una funzione «nucleo» $K(x, y)$ definito in $X \times Y$: dato un elemento di volume dx su X, tale corrispondenza dà

$$f(x) \mapsto (\Phi_K f)(y) = \int_X K(x, y)\, f(x)\, dx$$

(si pensi ad esempio alla trasformata di Fourier, ove $X = \mathbf{R}^n$, $Y = (\mathbf{R}^n)^*$ e $K(x, y) = \exp(-ix \cdot y)$). Formalmente, denotate con q_1 e q_2 le proiezioni di $X \times Y$ su X ed Y, si è effettuato un *pull-back* di f in $X \times Y$ (ovvero $(q_1^{-1}f)(x, y) = f(x)$), quindi una *moltiplicazione* per il nucleo $K(x, y)$, ed infine un *push-forward* di $K \cdot (q_1^{-1}f)$ in Y (ovvero un'integrazione lungo la mappa q_2, di fibra X). Questo procedimento può essere effettuato anche nella categoria dei fasci e (se X e Y sono analitiche complesse) dei $\mathcal{D}$-moduli, ove $\mathcal{D}$ è il fascio di anelli degli operatori differenziali lineari a coefficienti olomorfi: l'idea (vedi [2]) è di separare gli aspetti geometrici della trasformazione (stima di supporto, regolarità dei dati...), tipicamente di fasci, da quelli analitici (sistema di E.D.P. che intervengono nella descrizione degli spazi di dati in X ed in Y), tipicamente di $\mathcal{D}$-moduli. In queste categorie, rimandando a [4] per le notazioni, il pull-back diventa il funtore di immagine inversa per fasci q_1^{-1} (oppure per $\mathcal{D}$-moduli sinistri $\underline{q_1}^{-1}$), la moltiplicazione il prodotto tensoriale $\otimes = \otimes_{\mathbf{C}_{X \times Y}}$ (oppure $\otimes^L_{\mathcal{O}_{X \times Y}}$) ed il push-forward il funtore di immagine diretta propria per fasci $Rq_{2!}$ (oppure per $\mathcal{D}$-moduli $\underline{q_{2!}}$). In altre parole, sia $\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_X)$ (risp. $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$) la categoria derivata dei complessi di fasci di $\mathbf{C}$-spazi vettoriali (risp. $\mathcal{D}$-moduli) a coomologia limitata: dati $K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_{X \times Y}))$ e $\mathcal{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y}))$, sono definiti dei funtori

$$\Phi_K \colon \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_X) \to \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_Y), \qquad \Phi_K(F) = Rq_{2!}(K \otimes q_1^{-1}F),$$

$$\underline{\Phi}_{\mathcal{K}} \colon \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y), \qquad \underline{\Phi}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) = \underline{q_{2!}}(\mathcal{K} \otimes^L_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \underline{q_1}^{-1}\mathcal{M}),$$

e dei funtori simili (che denoteremo con gli stessi simboli) nelle direzioni opposte. Se $\mathcal{K}$ è un $\mathcal{D}_{X \times Y}$-modulo «olonomo regolare» (nozione che generalizza quella, in una variabile complessa, di $\mathcal{D}$-modulo associato ad equazioni differenziali ordina-