
Attività di ricerca (breve descrizione)

Corrado Marastoni

18 agosto 2008

L'ambito dell'attività di ricerca è quello dell'Analisi Algebrica, introdotta dalla scuola giapponese di M. Sato e M. Kashiwara. Originariamente sorta per studiare i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti analitici da un punto di vista algebrico (associando ad ogni sistema il corrispondente $\mathcal{D}$ -modulo, ovvero un modulo coerente sull'anello degli operatori differenziali analitici) e microlocale (analisi della varietà caratteristica nel fibrato cotangente), l'Analisi Algebrica, grazie alla sua natura interdisciplinare, ha progressivamente allargato la propria portata, mettendo in contatto settori di ricerca apparentemente lontani tra loro: esempi significativi sono i contributi di M. Kashiwara alla teoria delle singolarità con la soluzione generale del problema di Riemann-Hilbert, e alla teoria della rappresentazione con la dimostrazione della congettura di Kazhdan-Lusztig.

Diamo nel seguito una breve descrizione dei nostri studi (la numerazione rimanda alla lista delle pubblicazioni scientifiche, riportata più sotto).

Il sistema di Cauchy-Riemann tangenziale. Il primo oggetto di ricerca è stato il sistema di Cauchy-Riemann tangenziale $\bar{\partial}^b$ associato a una sottovarietà CR di una varietà complessa.

In [1] si presenta una naturale generalizzazione della nozione di “sottovarietà generica” di una varietà analitica complessa, ove il sistema di Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ è rimpiazzato da un qualsiasi $\mathcal{D}$ -modulo coerente sulla complessificazione della varietà, vista come analitica reale.

In [2] si studia la risolubilità di $\bar{\partial}^b$ nel caso in cui la sottovarietà CR ha rango di Levi costante, con applicazione all'annullamento di coomologia del complesso di “microfunzioni al bordo” naturalmente associato al quadro geometrico.

In [3] si classificano i fasci su una varietà analitica reale il cui “microsupporto” (l'analogo per i fasci della varietà caratteristica di un $\mathcal{D}$ -modulo coerente) è contenuto in un sottoinsieme Lagrangiano non necessariamente liscio del fibrato cotangente associato ad un sottoinsieme convesso.

Trasformazioni integrali per fasci e $\mathcal{D}$ -moduli. Ci siamo poi dedicati alle trasformazioni integrali, un soggetto di ricerca classico (Laplace, Fourier, Radon...) che può essere proficuamente studiato nel linguaggio delle categorie derivate di fasci e $\mathcal{D}$ -moduli.

In [4,5,6,7] si generalizzano i risultati noti per la “dualità proiettiva” (la naturale corrispondenza tra uno spazio proiettivo complesso e il suo duale) al caso di varietà di Grassmann “duali” (formate da sottospazi di dimensione complementare), in cui le singolarità della “relazione d'incidenza” tra esse richiedono l'uso dell'invarianza per l'azione di gruppo e della teoria delle b -funzioni.

In [8] si mostra come la trasformata di Penrose complessa e molte note trasformazioni integrali reali affini o proiettive (integrazioni di tipo Radon su piani di prescritta dimensione, caso conforme...) siano indotte da un'unica trasformazione integrale complessa; questo permette di ritrovare e miglio-

rare vari risultati classici in un ambito unificato. In particolare, in [9] si compie uno studio più esplicito dei nuclei integrali che descrivono la trasformazione di Radon per iperpiani.

Sistemi di equazioni invarianti su varietà omogenee e teoria della rappresentazione.

L'invarianza per azione di gruppo dei problemi appena descritti porta naturalmente a considerare gli stessi nell'ambito più generale delle varietà omogenee compatte di gruppi di Lie complessi semisemplici (le cosiddette “flag manifold” generalizzate).

In [11] si studiano in modo sistematico le trasformazioni integrali indotte dall'orbita chiusa per un gruppo qualsiasi (dunque, una generalizzazione di [8]) fornendo anche un algoritmo per il calcolo delle trasformate di $\mathcal{D}$ -moduli invarianti.

Con [10] (che annuncia i risultati principali di [12] e di un altro lavoro in fase di redazione) si generalizza similmente la dualità tra varietà omogenee studiata in [6], esaminandone le varie applicazioni alla teoria della rappresentazione.

Pubblicazioni Scientifiche

- [1] *Varietà generiche rispetto a sistemi differenziali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 86 (1991), p. 233–237
- [2] *Microfunctions along submanifolds with constant Levi rank*. Rend. Acc. delle Scienze 113 (1995), vol. XIX, p. 111–121 [con A. D'Agnolo e Giu. Zampieri]
- [3] *Non smooth Lagrangian sets and estimations of micro-support*. J. Math. Soc. Japan, 48/2 (1996), p. 255–258 [con A. D'Agnolo e Giu. Zampieri]
- [4] *La dualité de Grassmann pour les $\mathcal{D}$ -modules*. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, t. 322 (1996), p. 929–933.
- [5] *Quantification de la dualité de Grassmann*. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, t. 324 (1997), p. 1343–1348.
- [6] *Grassmann duality for $\mathcal{D}$ -modules*. Ann. Sci. École Normale Sup., 4^e série, t. 31 (1998), p. 459–491.
- [7] *Teoria dei fasci e trasformazioni integrali per $\mathcal{D}$ -moduli tra varietà di Grassmann*. Bollettino U.M.I. (8) 1-A Suppl. (1998), p. 129–132.
- [8] *Real forms of the Radon-Penrose transform*. Publ. of R.I.M.S., Kyoto University, 36/3 (2000), p. 337–383 [con A. D'Agnolo]
- [9] *A topological obstruction for the real Radon transform*. “Harmonic Analysis and Integral Geometry”, CRC, Chapman Hall (2000), p. 45–51 [con A. D'Agnolo]
- [10] *Generalized Verma modules, b -functions of semi-invariants and duality for twisted $\mathcal{D}$ -modules on generalized flag manifolds*. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, t. 335 (2002), p. 111–116.
- [11] *Radon transforms for quasi-equivariant $\mathcal{D}$ -modules on generalized flag manifolds*. Diff. Geom. Appl. 18 (2003), no. 2, p. 147–176 [con T. Tanisaki]
- [12] *Sheaves and $\mathcal{D}$ -modules on dual flag manifolds and generalized Verma modules* (2008); disponibile nel sito web www.math.unipd.it/~maraston/cvpub/Dmod_dualflag.pdf