ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 1

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

- (b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

- (c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) > 1$ definitivamente per $x \rightarrow 1$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;
(b) Enunciare il teorema di caratterizzazione delle costanti.
(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $y'(t) = \frac{2y(t)}{t}$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprenditive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 2

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3, \quad (1)$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

- (b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

- (c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \rightarrow \infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;
(b) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate.
(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $2y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{2-x}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 3

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \quad (1)$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

- (b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

- (c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \rightarrow -\infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;
(b) Enunciare il teorema di Rolle.
(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $ty'(t) = 2y(t)$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{3-x}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{e^x}{e^x - 1 + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 4

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2, \quad (1)$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

- (b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

- (c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \rightarrow -1$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

- (b) Enunciare il teorema di Lagrange.

- (c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $2y'(t) = \frac{y(t)}{2t}$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-3}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$