

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}, x - 2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \arctan\left(\frac{-x}{x-2}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{x-2} > 0 \iff x > 2, \quad \text{mentre} \quad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{x-2} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x < 2.$$

Dalla relazione (1) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-2}, y \rightarrow -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-2}, y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-2}, y \rightarrow 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-2}, y \rightarrow -1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

In particolare ne deduciamo che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 2\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x^2 + (x-2)^2};$$

pertanto, per (1), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2 + (x-2)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \frac{2}{x^2 + (x-2)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ne deduciamo: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \mp \frac{1}{2}$ e quindi $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_-(0) = \frac{1}{2}$. Di conseguenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente decrescente in $(0, 2)$ ed in $(2, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di minimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

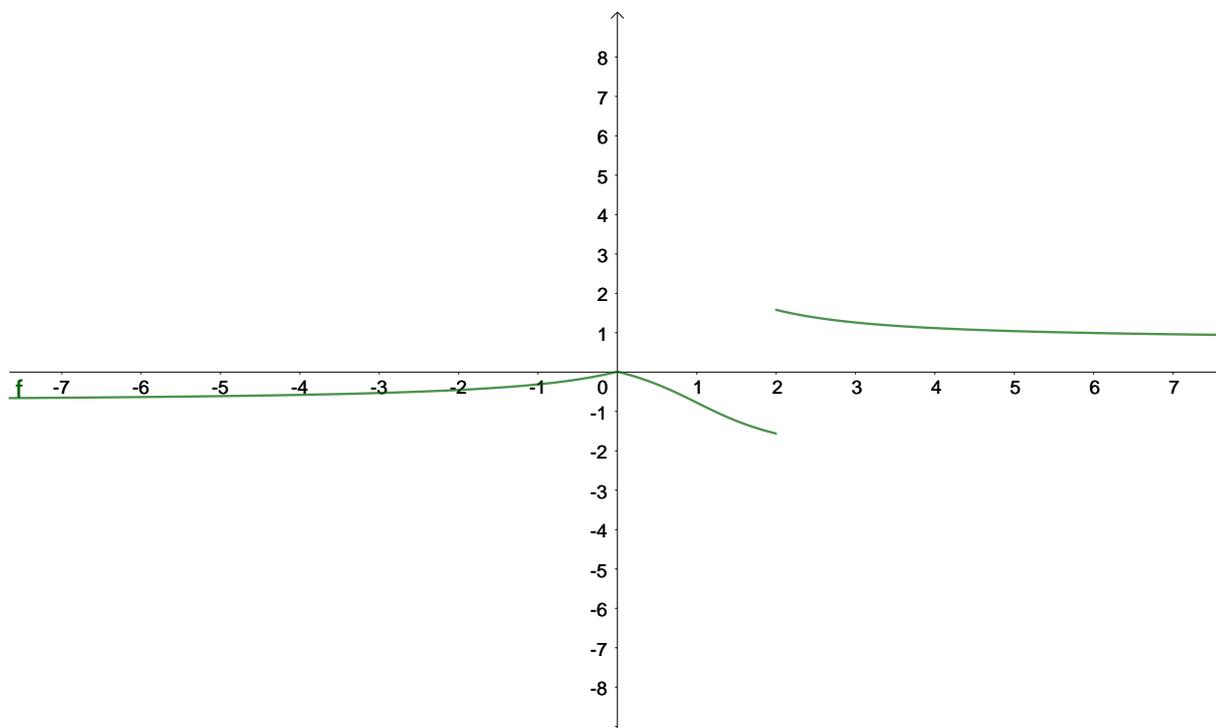


Figure 1: La funzione del Tema 1

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3} \right| = 0 \iff |\log a + 2| \leq 1;$$

pertanto la condizione necessaria è verificata se, e solo se, $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3} \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a + 2|^k}{k^2 + 3}. \quad (3)$$

Per $|\log a + 2| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (3) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a + 2| \leq 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a + 2|^k}{k^2 + 3} \leq \frac{1}{k^2 + 3}$$

e quindi la serie in (3) converge per confronto con la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 3}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2 + 3} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \rightarrow \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a + 2| \leq 1$ cioè per $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-3}$ ed $a = e^{-1}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cosh x$ dà

$$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1 + u)$ (sostituendovi $u = -\alpha x - x^2$; sostituzione consentita perché $u \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$) e $\sin x$, abbiamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x = -\alpha x - x^2 - \frac{(-\alpha x - x^2)^2}{2} + o((- \alpha x - x^2)^2) + x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x = (1 - \alpha)x + \left(-1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(1 - \alpha) > 0 \ (\alpha < 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x + o(x)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = +\infty$$

$$(1 - \alpha) < 0 \ (\alpha > 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x + o(x)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -\infty$$

$$(1 - \alpha) = 0 \ (\alpha = 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1 - \frac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -3.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \sin x + 1} dx \stackrel{y=2 \sin x + 1}{=} \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} [\log |y|]_{y=1}^{y=3} = \frac{\log 3}{2}.$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0, 1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x = 0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0, 1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x + x^\alpha} = x^{-\alpha} \frac{\cos x}{2x^{-\alpha} \sin x + 1}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0, \frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1 + o(x)}{2x + o(x) + x^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x} \quad \forall \alpha > 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x} \quad \text{per } \alpha = 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall \alpha < 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha \geq 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprenditive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{2-x}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}, x - 2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \arctan\left(\frac{-x}{2-x}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{2-x} > 0 \iff x < 2, \quad \text{mentre} \quad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{2-x} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x > 2.$$

Dalla relazione (4) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{2-x} \rightarrow \infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{2-x} \rightarrow -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{2-x} \rightarrow -1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{2-x} \rightarrow 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

In particolare ne deduciamo che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 2\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(2-x)^2}} \cdot \frac{2-x+x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2 + (2-x)^2};$$

pertanto, per (4), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 + (2-x)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Ne deduciamo: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm \frac{1}{2}$ e quindi $f'_+(0) = \frac{1}{2}$, $f'_-(0) = -\frac{1}{2}$. Di conseguenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente crescente in $(0, 2)$ ed in $(2, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di massimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

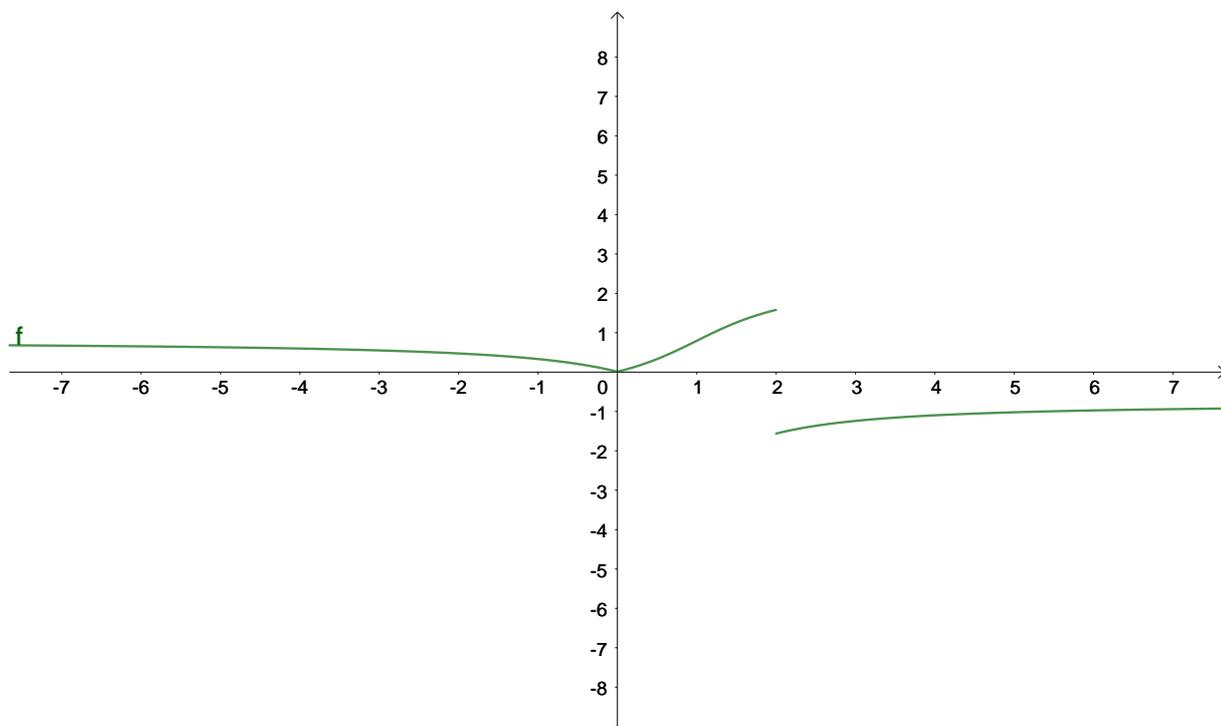


Figure 2: La funzione del Tema 2

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2} \right| = 0 \iff |\log a + 3| \leq 1;$$

pertanto la condizione necessaria è verificata se, e solo se, $e^{-4} \leq a \leq e^{-2}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2} \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a + 3|^k}{k^2 + 2}. \quad (6)$$

Per $|\log a + 3| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (6) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a + 3| \leq 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a + 3|^k}{k^2 + 2} \leq \frac{1}{k^2 + 2}$$

e quindi la serie in (6) converge per confronto con la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 2}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2+2} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \rightarrow \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a + 3| \leq 1$ cioè per $e^{-4} \leq a \leq e^{-2}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-4}$ ed $a = e^{-2}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-4} \leq a \leq e^{-2}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cos x$ dà

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1 + u)$ (sostituendovi $u = -\alpha x - x^2$; sostituzione consentita perché $u \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$) e $\sinh x$, abbiamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x = -\alpha x - x^2 - \frac{(-\alpha x - x^2)^2}{2} + o((- \alpha x - x^2)^2) + x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x = (1 - \alpha)x + \left(-1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(1 - \alpha) > 0 \ (\alpha < 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -\infty$$

$$(1 - \alpha) < 0 \ (\alpha > 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = +\infty$$

$$(1 - \alpha) = 0 \ (\alpha = 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1 - \frac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 3.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx \stackrel{y = \sin x + 2}{=} \int_2^3 \frac{1}{y} dy = [\log |y|]_{y=2}^{y=3} = \log(3/2).$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0, 1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x = 0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0, 1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha} = x^{-\alpha} \frac{\cos x}{x^{-\alpha} \sin x + 2}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0, \frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1 + o(x)}{x + o(x) + 2x^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x} \quad \forall \alpha > 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x} \quad \text{per } \alpha = 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha} \quad \forall \alpha < 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha \geq 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprenditive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{3-x}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}, x - 3 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{3-x}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ \arctan\left(\frac{-x}{3-x}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{3-x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{3-x} > 0 \iff x < 3, \quad \text{mentre} \quad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{3-x} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x > 3.$$

Dalla relazione (7) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{\substack{y = \frac{|x|}{3-x} \\ y \rightarrow \infty}} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{\substack{y = \frac{|x|}{3-x} \\ y \rightarrow -\infty}} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{\substack{y = \frac{|x|}{3-x} \\ y \rightarrow -1}} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{\substack{y = \frac{|x|}{3-x} \\ y \rightarrow 1}} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

In particolare ne deduciamo che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{3-x}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(3-x)^2}} \cdot \frac{3-x+x}{(x-2)^2} = \frac{3}{x^2 + (3-x)^2};$$

pertanto, per (7), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2 + (3-x)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ -\frac{3}{x^2 + (3-x)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ne deduciamo: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm \frac{1}{3}$ e quindi $f'_+(0) = \frac{1}{3}$, $f'_-(0) = -\frac{1}{3}$. Di conseguenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente crescente in $(0, 3)$ ed in $(3, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di massimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

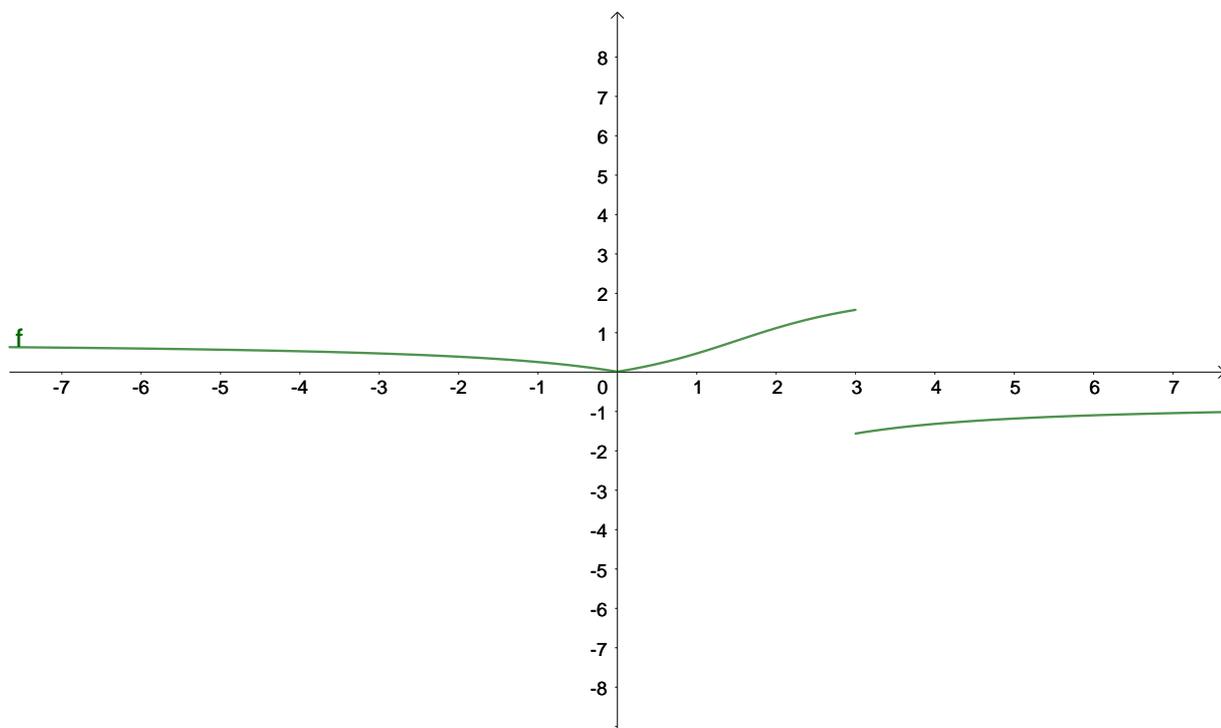


Figure 3: La funzione del Tema 3

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1} \right| = 0 \iff |\log a + 4| \leq 1;$$

però la condizione necessaria è verificata se, e solo se, $e^{-5} \leq a \leq e^{-3}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1} \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a + 4|^k}{k^2 + 1}. \quad (9)$$

Per $|\log a + 4| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (9) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a + 4| \leq 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a + 4|^k}{k^2 + 1} \leq \frac{1}{k^2 + 1}$$

e quindi la serie in (9) converge per confronto con la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2 + 1} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \rightarrow \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a + 4| \leq 1$ cioè per $e^{-5} \leq a \leq e^{-3}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-5}$ ed $a = e^{-3}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poiché i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-5} \leq a \leq e^{-3}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cosh x$ dà

$$1 - \cosh x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1 + u)$ (sostituendovi $u = \alpha x + x^2$; sostituzione consentita perché $u \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$) e $\sin x$, abbiamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x = \alpha x + x^2 - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o((\alpha x + x^2)^2) - x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x = (\alpha - 1)x + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(\alpha - 1) > 0 \ (\alpha > 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - 1)x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -\infty$$

$$(\alpha - 1) < 0 \ (\alpha < 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - 1)x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \infty$$

$$(\alpha - 1) = 0 \ (\alpha = 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \frac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{e^x}{e^x - 1 + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_{y=e^x+1}^{y=e^{e+1}+1} \frac{1}{y} dy = [\log |y|]_{y=1}^{y=e^{e+1}+1} = \log(e + 1).$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0, 1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x = 0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0, 1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{e^x}{e^x - 1 + 2x^\alpha} = x^{-\alpha} \frac{e^x}{x^{-\alpha}(e^x - 1) + 2}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0, 1]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per e^x , abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1 + o(x)}{x + o(x) + 2x^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x} \quad \forall \alpha > 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x} \quad \text{per } \alpha = 1, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha} \quad \forall \alpha < 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha \geq 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-3}\right).$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}, x - 3 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{x-3}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ \arctan\left(\frac{-x}{x-3}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{x-3}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{x-3} > 0 \iff x > 3, \quad \text{mentre} \quad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{x-3} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x < 3.$$

Dalla relazione (10) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-3}, y \rightarrow -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-3}, y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-3}, y \rightarrow 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y = \frac{|x|}{x-3}, y \rightarrow -1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

In particolare ne deduciamo che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{x-3}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x-3)^2}} \cdot \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{x^2 + (x-3)^2};$$

pertanto, per (10), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x^2 + (x-3)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ \frac{3}{x^2 + (x-3)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Ne deduciamo: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \mp \frac{1}{3}$ e quindi $f'_+(0) = -\frac{1}{3}$, $f'_-(0) = \frac{1}{3}$. Di conseguenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente decrescente in $(0, 3)$ ed in $(3, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di minimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

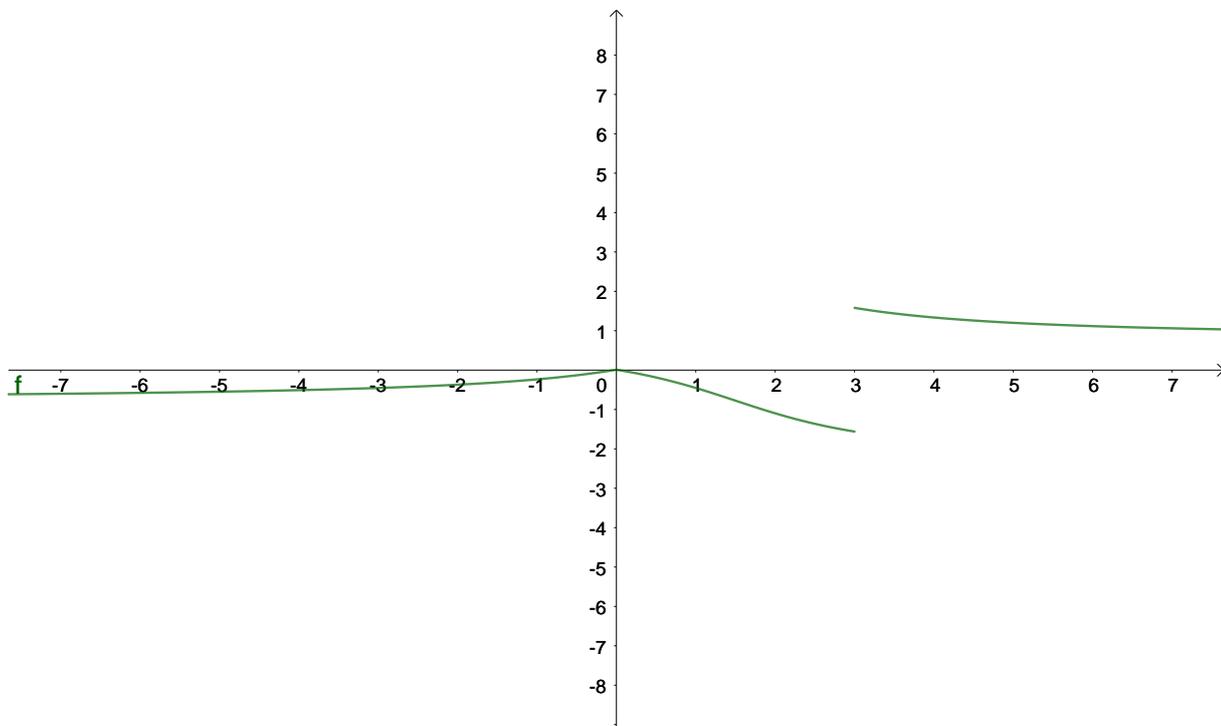


Figure 4: La funzione del Tema 4

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4} \right| = 0 \iff |\log a + 1| \leq 1;$$

pertanto la condizione necessaria è verificata se, e solo se, $e^{-2} \leq a \leq 1$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4} \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a + 1|^k}{k^2 + 4}. \quad (12)$$

Per $|\log a + 1| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (12) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a + 1| \leq 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a + 1|^k}{k^2 + 4} \leq \frac{1}{k^2 + 4}$$

e quindi la serie in (12) converge per confronto con la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 4}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2 + 4} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \rightarrow \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a + 1| \leq 1$ cioè per $e^{-2} \leq a \leq 1$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-2}$ ed $a = 1$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-2} \leq a \leq 1$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cos x$ dà

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1 + u)$ (sostituendovi $u = \alpha x + x^2$; sostituzione consentita perché $u \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$) e $\sinh x$, abbiamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x = \alpha x + x^2 - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o((\alpha x + x^2)^2) - x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x = (-1 + \alpha)x + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(-1 + \alpha) > 0 \ (\alpha > 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \alpha)x + o(x)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = +\infty$$

$$(-1 + \alpha) < 0 \ (\alpha < 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \alpha)x + o(x)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -\infty$$

$$(-1 + \alpha) = 0 \ (\alpha = 1) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \frac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{- \cos x + 2} dx \stackrel{y = -\cos x + 2}{=} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = [\log |y|]_{y=1}^{y=2} = \log 2.$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0, 1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x = 0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0, 1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x + x^\alpha} = x^{-\alpha} \frac{\sin x}{x^{-\alpha} - x^{-\alpha} \cos x + 1}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0, \frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{x + o(x)}{x^2/2 + o(x^2) + x^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{2}{x^2} \quad \forall \alpha > 2, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{2}{3x^2} \quad \text{per } \alpha = 2, \quad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad \forall \alpha < 2.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 2$ e diverge per $\alpha \geq 2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$