ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 19.01.2026

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 1

1. (a) Scrivere la definizione del limite
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \tag{1}$$
dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

   (b) Utilizzando la definizione precedente mostrare che vale
$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

   (c) Costruire una funzione f che soddisfa (1) e tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

   (b) Enunciare il teorema di Fermat sui punti critici.

   (c) Siano $f(x) = x^2(\arctan(x+3))^2$ e $g(x) = |x\cos x|$.

   c1. Dimostrare che le due funzioni precedenti hanno minimo in 0 senza usare derivate;

   c2. Stabilire se il teorema di Fermat sia applicabile nel punto $x = 0$ alle funzioni f e g.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan\left(|x-1|\right).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolare la derivata prima (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f_\alpha(x) = x^{\alpha-1}\arctan(\sqrt{x})$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 2y(t) = \frac{4}{e^{2t}-1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 19.01.2026

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 2

1. (a) Scrivere la definizione del limite
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \tag{1}$$
dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

   (b) Utilizzando la definizione precedente mostrare che vale
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \sin(x) \right) = 0$$

   (c) Costruire una funzione f che soddisfa (1) e tale che $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

   (b) Enunciare il teorema di Fermat sui punti critici.

   (c) Siano $f(x) = x^2(\cos x)^2$ e $g(x) = |x \sin x|$.

      c1. Dimostrare che le due funzioni precedenti hanno minimo in 0 senza usare derivate;

      c2. Stabilire se il teorema di Fermat sia applicabile nel punto $x = 0$ alle funzioni f e g.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan\left(|x-2|\right).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolare la derivata prima (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x+2)^n\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f_a(x) = 3x^{1-a}\arctan(\sqrt{x})$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 3y(t) = \frac{5}{e^{3t}-1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6); \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 19.01.2026

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 3

1. (a) Scrivere la definizione del limite
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \tag{1}$$
dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

   (b) Utilizzando la definizione precedente mostrare che vale
$$\lim_{x\to 0}\left(x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

   (c) Costruire una funzione f che soddisfa (1) e tale che $f(x) = o\left(x^3\right)$ per $x \to 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

   (b) Enunciare il teorema di Fermat sui punti critici.

   (c) Siano $f(x) = x^2(\sin(x+3))^2$ e $g(x) = |x \cos x|$.

      c1. Dimostrare che le due funzioni precedenti hanno minimo in 0 senza usare derivate;

      c2. Stabilire se il teorema di Fermat sia applicabile nel punto $x = 0$ alle funzioni f e g.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan(|x-3|).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolare la derivata prima (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x+1)^n \left(\frac{1}{n^2} + \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) \right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{2\arctan(\sqrt{x})}{x^{1-\alpha}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\, dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 4y(t) = \frac{3}{e^{4t} - 1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 19.01.2026

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 4

1. (a) Scrivere la definizione del limite
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \tag{1}$$
dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

   (b) Utilizzando la definizione precedente mostrare che vale
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\cos x\,(x)\right) = 0$$

   (c) Costruire una funzione f che soddisfa (1) e tale che $f(x) = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \to +\infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

   (b) Enunciare il teorema di Fermat sui punti critici.

   (c) Siano $f(x) = x^2(\sin x)^2$ e $g(x) = |x\cos x|$.

      c1. Dimostrare che le due funzioni precedenti hanno minimo in 0 senza usare derivate;

      c2. Stabilire se il teorema di Fermat sia applicabile nel punto $x = 0$ alle funzioni f e g.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan\left(|x-4|\right).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolare la derivata prima (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x-2)^n \left(\frac{1}{n^3} + \tan\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Si consideri $f_a(x) = \dfrac{2\arctan(\sqrt{x})}{x^{a-1}}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 7y(t) = \frac{7}{e^{7t} - 1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6); \qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$