ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan(|x-1|).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento

(a) Il dominio della funzione è chiaramente $\mathbb{R}$. La funzione è continua nel dominio perchè composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Gli unici limiti notevoli sono quindi agi estremi. Si trova facilmente che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \pi$$

Quindi $y = x + \pi$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

(c) Per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+(x-1)^2} & \text{per } x < 1 \\ 1 + \frac{2}{1+(x-1)^2} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Per la presenza del valore assoluto l'unico punto da verificare per la derivata è 1. Vediamo gli attacchi:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1$$

Quindi $x_0 = 1$ è punto angoloso di minimo relativo stretto. Per ogni $x > 1$ si vede facilmente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 1$ otteniamo

$$f'(x) = \frac{1 + (x-1)^2 - 2}{1 + (x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{1 + (x-1)^2}$$

Quindi per $x < 1$ $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \{x < 0\}$. Abbiamo quindi ottenuto che $x_1 = 0$ è punto di massimo relativo stretto.

(d) Il grafico della funzione segue:

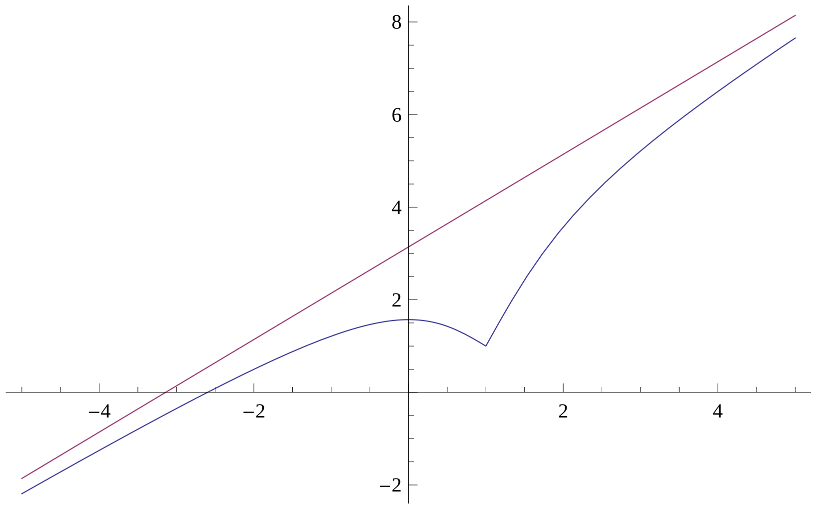


Figure 1: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x + 2\arctan|x-1|$ Tema 1.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Per $x = 1$ la serie è nulla, quindi converge sia assolutamente che semplicemente. Per $x \neq 1$, studiamo la convergenza assoluta della serie osservando dapprima che $|a_n| \sim \frac{|x-1|^n}{n} = b_n$ applicando poi il criterio del rapporto a b_n. Otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}}{|x-1|^n\cdot\frac{1}{n}} = |x-1|$$

Quindi per $|x-1| < 1$ cioè per $x \in (0,2)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice). Per $x \in (x < 0) \cup (x > 2)$ la serie non converge perchè il termine n-esimo non tende a 0. Se $x = 0$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Si verifica facilmente che $a_n = \frac{1}{n^2} + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è una successione strettamente monotona decrescente e che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e quindi per il criterio di Leibnitz la serie converge. Poichè $|a_n| \sim \frac{1}{n}$ in 0 non c'è convergenza assoluta. Per $x = 2$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

a termini positivi. Poichè $a_n \sim \frac{1}{n}$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 (punti 8) Si consideri la funzione $f_a(x) = x^{a-1}\arctan(\sqrt{x})$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare $I = \int_0^1 \arctan(\sqrt{x})dx$. Integriamo per parti.

$$I = x\arctan(\sqrt{x})|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(x+1)2\sqrt{x}}dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \sqrt{x}|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)2\sqrt{x}} = \frac{\pi}{4} - 1 + \arctan\sqrt{x}|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la sostituzione $t = \sqrt{x}$.

(b) Vicino al punto zero, la funzione integranda è asintotica a $\frac{1}{x^{1-a-\frac{1}{2}}}$ quindi abbiamo convergenza se $1 - a - \frac{1}{2} < 1$ cioè per $a > -\frac{1}{2}$. All' infinito la funzione integranda è asintotica a $\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{1-a}}$ e quindi c'è convergenze per $1 - a > 1$ cioè $a < 0$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 2y(t) = \frac{4}{e^{2t} - 1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Svolgimento:

(a) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'integrale generale è quindi data dalla formula:

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(c + \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $A(t) = \int -2dt = -2t$ e $b(t) = \dfrac{4}{e^{2t} - 1}$. Abbiamo:

$$\int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \int \frac{4e^{2t}}{e^{2t} - 1} = 2\log\left|\mathrm{e}^{2t} - 1\right|$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = ce^{-2t} + 2e^{-2t}\log\left|\mathrm{e}^{2t} - 1\right|$$

(b) Ponendo le condizione iniziale otteniamo: $0 = ce^{-2} + 2e^{-2}\log(e^2 - 1)$, quindi $c = -2\log(e^2 - 1)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -2\log(e^2 - 1)e^{-2t} + 2e^{-2t}\log\left(\mathrm{e}^{2t} - 1\right)$$

che ha come dominio massimale di definizione (che contiene il punto iniziale $t_0 = 1$) $(0, +\infty)$

Tempo: Due ore e mezza (comprensive della parte di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan(|x-2|) .$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento:

(a) Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}$. La funzione è continua nel dominio perchè composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Gli unici limiti notevoli sono quindi agi estremi. Si trova facilmente che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \pi$$

Quindi $y = x + \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$ e $+\infty$.

(c) Per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+(x-2)^2} & \text{per } x < 2 \\ 1 + \frac{2}{1+(x-2)^2} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Per la presenza del valore assoluto l'unico punto da verificare per la derivata è 2. Vediamo gli attacchi:

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -1$$

Quindi $x_0 = 2$ è punto angoloso di minimo relativo stretto. Per ogni $x > 2$ si vede facilmente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 2$ otteniamo

$$f'(x) = \frac{1 + (x-2)^2 - 2}{1 + (x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{1 + (x-1)^2}$$

Quindi per $x < 2$ $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \{x < 1\}$. Abbiamo quindi ottenuto che $x_1 = 1$ è punto di massimo relativo stretto.

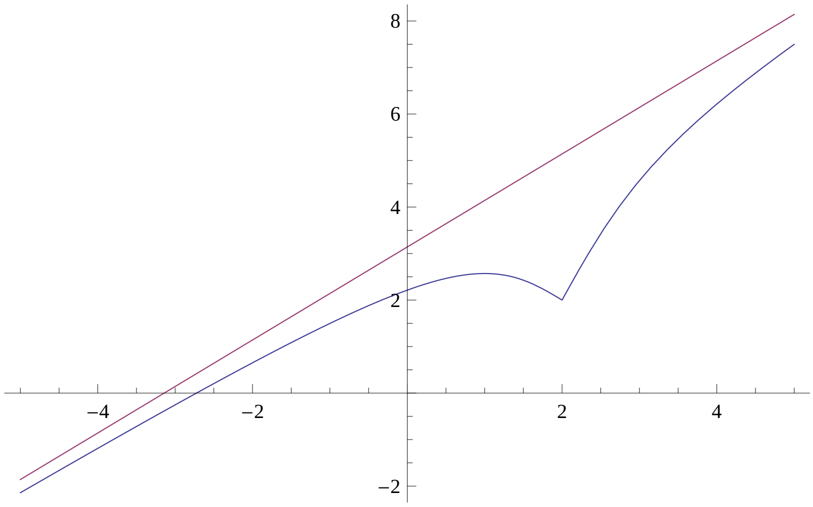
(d) 

Figure 2: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x + 2\arctan|x-2|$ Tema 2.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x+2)^n\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Per $x = -2$ la serie è nulla, quindi converge sia assolutamente che semplicemente. Per $x \neq -2$, studiamo la convergenza assoluta della serie osservando dapprima che $|a_n| \sim \frac{|x+2|^n}{n} = b_n$ applicando poi il criterio del rapporto a b_n. Otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}}{|x+2|^n\cdot\frac{1}{n}} = |x+2|$$

Quindi per $|x+2| < 1$ cioè per $x \in (-3,-1)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice). Per $x \in (x < -3) \cup (x > -1)$ la serie non converge perchè il termine n-esimo non tende a 0. Se $x = -3$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Si verifica facilmente che $a_n = \frac{1}{n^3} + \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ è una successione strettamente monotona decrescente e che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e quindi per il criterio di Leibnitz la serie converge. Poichè $|a_n| \sim \frac{1}{n}$ in -3 non c'è convergenza assoluta. Per $x = -1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

a termini positivi. Poichè $a_n \sim \frac{1}{n}$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 (punti 8) Si consideri la funzione $f_a(x) = 3x^{1-a}\arctan(\sqrt{x})$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare $I = 3\int_0^1 \arctan(\sqrt{x})dx$. Integriamo per parti.

$$\tfrac{I}{3} = x\arctan(\sqrt{x})|_0^1 - \int_0^1 x\tfrac{1}{1+x}\tfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \tfrac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}} - \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}}dx\right)$$

$$= \tfrac{\pi}{4} - \sqrt{x}|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}} = \tfrac{\pi}{4} - 1 + \arctan\sqrt{x}|_0^1 = \tfrac{\pi}{2} - 1$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la sostituzione $t = \sqrt{x}$. Quindi $I = \frac{3\pi}{2} - 3$

(b) Vicino al punto zero si vede immediatamente che la funzione integranda è asintotica a $\frac{3}{x^{a-1-\frac{1}{2}}}$ quindi abbiamo convergenza se $a - 1 - \frac{1}{2} < 1$ cioè per $a < \frac{5}{2}$. All' infinito la funzione integranda è asintotica a $\frac{3\pi}{2}\frac{1}{x^{a-1}}$ e quindi c'è convergenze per $a - 1 > 1$ cioè $a > 2$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $a \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 3y(t) = \frac{5}{e^{3t} - 1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Svolgimento:

(a) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'integrale generale è quindi data dalla formula:

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(c + \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $A(t) = \int -3dt = -3t$ e $b(t) = \dfrac{5}{e^{3t} - 1}$. Abbiamo:

$$\int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \int \frac{5e^{3t}}{e^{3t} - 1} = \frac{5}{3}\log\left|\mathrm{e}^{3t} - 1\right|$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = ce^{-3t} + \frac{5}{3}e^{-3t}\log\left|\mathrm{e}^{3t} - 1\right|$$

(b) Ponendo le condizione iniziale otteniamo: $0 = ce^{-3} + \frac{5}{3}e^{-3}\log(e^3 - 1)$, quindi $c = -\frac{5}{3}\log(e^3 - 1)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -\frac{5}{3}\log(e^3 - 1)e^{-3t} + \frac{5}{3}e^{-3t}\log\left(\mathrm{e}^{3t} - 1\right)$$

che ha come dominio massimale di definizione (che contiene il punto iniziale $t_0 = 1$) $(0, +\infty)$

Tempo: Due ore e mezza (comprensive della parte di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan(|x-3|).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento:

(a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione è continua nel dominio perchè composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Gli unici limiti notevoli sono quindi agi estremi. Si trova facilmente che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \pi$$

Quindi $y = x + \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$ e a $+\infty$.

(c) Per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+(x-3)^2} & \text{per } x < 3 \\ 1 + \frac{2}{1+(x-3)^2} & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

Per la presenza del valore assoluto l'unico punto da verificare per la derivata è 3. Vediamo gli attacchi:

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -1$$

Quindi $x_0 = 3$ è punto angoloso di minimo relativo stretto. Per ogni $x > 3$ si vede facilmente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 3$ otteniamo

$$f'(x) = \frac{1 + (x-3)^2 - 2}{1 + (x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{1 + (x-3)^2}$$

Quindi per $x < 3$ $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \{x < 2\}$. Abbiamo quindi ottenuto che $x_1 = 2$ è punto di massimo relativo stretto.

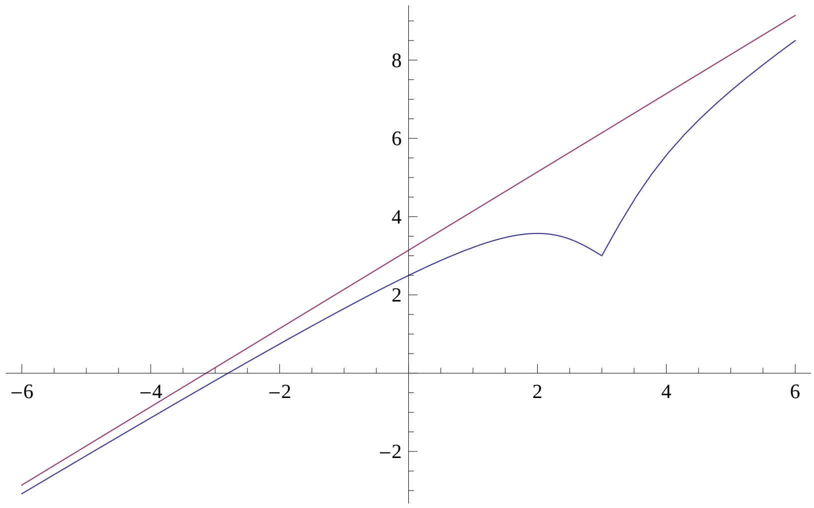
(d) 

Figure 3: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x + 2\arctan|x-3|$ Tema 3.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x+1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Per $x = -1$ la serie è nulla, quindi converge sia assolutamente che semplicemente. Per $x \neq -1$, studiamo la convergenza assoluta della serie osservando dapprima che $|a_n| \sim \frac{3|x+1|^n}{n} = b_n$ applicando poi il criterio del rapporto a b_n. Otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3|x+1|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}}{3|x+1|^n\cdot\frac{1}{n}} = |x+1|$$

Quindi per $|x+1| < 1$ cioè per $x \in (-2, 0)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice). Per $x \in (x < -2) \cup (x > 0)$ la serie non converge perchè il termine n-esimo non tende a 0. Se $x = -2$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)$$

Si verifica facilmente che $a_n = \frac{1}{n^2} + \log\left(1+\frac{3}{n}\right)$ è una successione strettamente monotona decrescente e che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e quindi per il criterio di Leibnitz la serie converge. Poichè $|a_n| \sim \frac{3}{n}$ in -2 non c'è convergenza assoluta. Per $x = 0$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)$$

a termini positivi. Poichè $a_n \sim \frac{3}{n}$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 (punti 8) Si consideri $f_a(x) = \dfrac{2\arctan(\sqrt{x})}{x^{1-a}}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare $I = 2\int_0^1 \arctan(\sqrt{x})dx$. Integriamo per parti.

$$\tfrac{I}{2} = x\arctan(\sqrt{x})|_0^1 - \int_0^1 x\tfrac{1}{1+x}\tfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \tfrac{\pi}{4} - \int_0^1\left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}} - \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}}dx\right)$$

$$= \tfrac{\pi}{4} - \sqrt{x}|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}} = \tfrac{\pi}{4} - 1 + \arctan\sqrt{x}|_0^1 = \tfrac{\pi}{2} - 1$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la sostituzione $t = \sqrt{x}$. Quindi $I = \pi - 2$

(b) Vicino al punto zero si vede immediatamente che la funzione integranda è asintotica a $\frac{2}{x^{1-a-\frac{1}{2}}}$ quindi abbiamo convergenza se $1-a-\frac{1}{2} < 1$ cioè per $a > -\frac{1}{2}$. All' infinito la funzione integranda è asintotica a $\pi\frac{1}{x^{1-a}}$ e quindi c'è convergenze per $1-a > 1$ cioè $a < 0$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 4y(t) = \frac{3}{e^{4t}-1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Svolgimento:

(a) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'integrale generale è quindi data dalla formula:

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(c + \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $A(t) = \int -4dt = -4t$ e $b(t) = \dfrac{3}{e^{4t}-1}$. Abbiamo:

$$\int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \int \frac{3e^{4t}}{e^{4t}-1} = \frac{3}{4}\log\left|\mathrm{e}^{4t}-1\right|$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = ce^{-4t} + \frac{3}{4}e^{-4t}\log\left|\mathrm{e}^{4t}-1\right|$$

(b) Ponendo le condizione iniziale otteniamo: $0 = ce^{-4} + \frac{3}{4}e^{-4}\log(e^4-1)$, quindi $c = -\frac{3}{4}\log(e^4-1)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -\frac{3}{4}\log(e^4-1)e^{-4t} + \frac{3}{4}e^{-4t}\log\left(\mathrm{e}^{4t}-1\right)$$

che ha come dominio massimale di definizione (che contiene il punto iniziale $x_0 = 1$) $(0, +\infty)$

Tempo: Due ore e mezza (comprensive della parte di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.01.2026

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x + 2\arctan(|x-4|).$$

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità. Non è richiesto lo studio del segno;

(b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

(c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento:

(a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. La funzione ćontinua nel dominio perchè composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Gli unici limiti notevoli sono quindi agi estremi. Si trova facilmente che:

$$\lim\ _{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim\ _{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim\ _{x\to\pm\infty} f(x) - x = \pi$$

Quindi $y = x + \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$ e a $+\infty$.

(c) Per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$ abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+(x-4)^2} & \text{per } x < 4 \\ 1 + \frac{2}{1+(x-4)^2} & \text{per } x > 4 \end{cases}$$

Per la presenza del valore assoluto l'unico punto da verificare per la derivata è 4. Vediamo gli attacchi:

$$\lim_{x\to 4^+} f'(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = -1$$

Quindi $x_0 = 4$ è punto angoloso di minimo relativo stretto. Per ogni $x > 4$ si vede facilmente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 4$ otteniamo

$$f'(x) = \frac{1 + (x-4)^2 - 2}{1 + (x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 15}{1 + (x-3)^2}$$

Quindi per $x < 4$ $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \{x < 3\}$. Abbiamo quindi ottenuto che $x_1 = 3$ è punto di massimo relativo stretto.

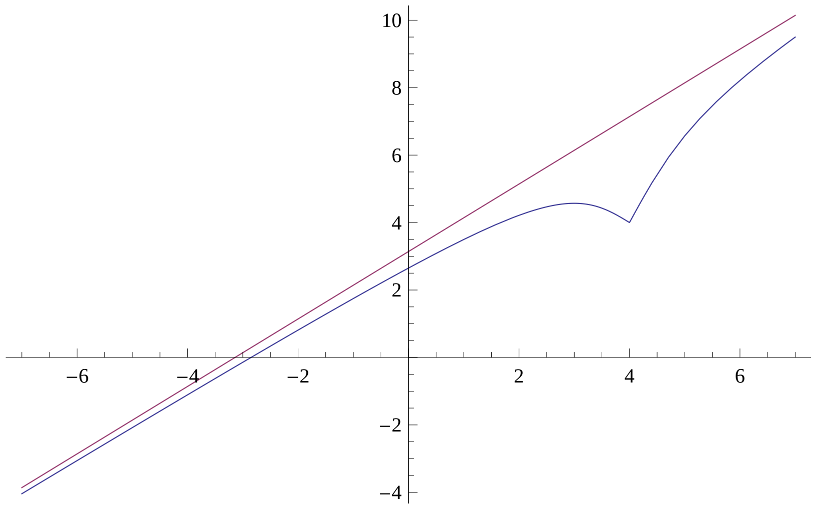
(d) 

Figure 4: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x + 2\arctan|x-4|$ Tema 4.

Esercizio 2 (punti 8) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x-2)^n\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Per $x = 2$ la serie è nulla, quindi converge sia assolutamente che semplicemente. Per $x \neq 2$, studiamo la convergenza assoluta della serie osservando dapprima che $|a_n| \sim \frac{2|x-2|^n}{n} = b_n$ applicando poi il criterio del rapporto a b_n. Otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x-2|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}}{2|x-2|^n\cdot\frac{1}{n}} = |x-2|$$

Quindi per $|x-2| < 1$ cioè per $x \in (1,3)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice). Per $x \in (x < 1) \cup (x > 3)$ la serie non converge perchè il termine n-esimo non tende a 0. Se $x = 1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

Si verifica facilmente che $a_n = \frac{1}{n^3} + \tan\left(\frac{2}{n}\right)$ è una successione strettamente monotona decrescente e che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, e quindi per il criterio di Leibnitz la serie converge. Poichè $|a_n| \sim \frac{2}{n}$ in -3 non c'è convergenza assoluta. Per $x = 3$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\tan\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

a termini positivi. Poichè $a_n \sim \frac{2}{n}$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 (punti 8) Si consideri $f_a(x) = \dfrac{2\arctan(\sqrt{x})}{x^{a-1}}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare $I = 2\int_0^1 \arctan(\sqrt{x})dx$. Integriamo per parti.

$$\tfrac{I}{2} = x\arctan(\sqrt{x})|_0^1 - \int_0^1 x\tfrac{1}{1+x}\tfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \tfrac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}} - \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}}dx\right)$$

$$= \tfrac{\pi}{4} - \sqrt{x}|_0^1 + \int_0^1 \tfrac{1}{(x+1)2\sqrt{x}} = \tfrac{\pi}{4} - 1 + \arctan\sqrt{x}|_0^1 = \tfrac{\pi}{2} - 1$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la sostituzione $t = \sqrt{x}$. Quindi $I = \pi - 2$

(b) Vicino al punto zero si vede immediatamente che la funzione integranda è asintotica a $\frac{2}{x^{a-1-\frac{1}{2}}}$ quindi abbiamo convergenza se $a - 1 - \frac{1}{2} < 1$ cioè per $a < \frac{5}{2}$. All' infinito la funzione integranda è asintotica a $\pi\frac{1}{x^{a-1}}$ e quindi c'è convergenze per $a - 1 > 1$ cioè $a > 2$. In conclusione l'integrale converge se e solo se $a \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'(t) + 7y(t) = \frac{7}{e^{7t} - 1}$$

(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del punto (a) tale che $y(1) = 0$ ed il suo intervallo massimale di definizione.

Svolgimento:

(a) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'integrale generale è quindi data dalla formula:

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(c + \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right)$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $A(t) = \int -7dt = -7t$ e $b(t) = \dfrac{7}{e^{7t} - 1}$. Abbiamo:

$$\int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \int \frac{7e^{7t}}{e^{7t} - 1} = \log\left|\mathrm{e}^{7t} - 1\right|$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = ce^{-7t} + e^{-7t}\log\left|\mathrm{e}^{7t} - 1\right|$$

(b) Ponendo le condizione iniziale otteniamo: $0 = ce^{-7} + e^{-7}\log(e^7 - 1)$, quindi $c = -\log(e^7 - 1)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -\log(e^7 - 1)e^{-7t} + e^{-7t}\log\left(\mathrm{e}^{7t} - 1\right)$$

che ha come dominio massimale di definizione (che contiene il punto iniziale $t_0 = 1$) $(0, +\infty)$

Tempo: Due ore e mezza (comprensive della parte di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.