

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 10.02.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 1

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1)$$

- (b) Mostrare, usando la definizione che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0$.

- (c) Correggere la seguente affermazione:

“Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e soddisfa (1) allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.”

2. (a) Scrivere la definizione di funzione continua.

- (b) Enunciare il teorema degli zeri (o di Bolzano).

- (c) Stabilire se l'equazione $e^x + x = 0$ ammette una soluzione nell'intervallo $[-1, 0]$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt{k}}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \frac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

- i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]
- ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{2t}.$$

- i) Determinare l'integrale generale.
- ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA \leq 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \bar{z}^2$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 10.02.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 2

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty. \quad (2)$$

- (b) Mostrare, usando la definizione che $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1) = +\infty$

- (c) Correggere la seguente affermazione:

“Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e soddisfa (2) allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge.”

2. (a) Scrivere la definizione di funzione continua.

- (b) Enunciare il teorema dei valori intermedi.

- (c) Stabilire se l'equazione $e^x + x = \frac{1}{2}$ ammette una soluzione nell'intervallo $[-1, 0]$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \frac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

- i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]
- ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{2t}.$$

- i) Determinare l'integrale generale.
- ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA \leq 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \bar{z}^2$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 10.02.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 3

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

- (b) Mostrare, usando la definizione che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

- (c) Correggere la seguente affermazione:

“Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e soddisfa (4) allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.”

2. (a) Scrivere la definizione di funzione continua.

- (b) Enunciare il teorema degli zeri (o di Bolzano).

- (c) Stabilire se l'equazione $4 \log x - x = 0$ ammette una soluzione nell'intervallo $[1, e]$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{2/3}}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

- i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]
- ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}.$$

- i) Determinare l'integrale generale.
- ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA \leq 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \bar{z}^2$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 10.02.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 4

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty. \quad (4)$$

- (b) Mostrare, usando la definizione che $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2) = +\infty$.

- (c) Correggere la seguente affermazione:

“Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e soddisfa (4) allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge.”

2. (a) Scrivere la definizione di funzione continua.

- (b) Enunciare il teorema dei valori intermedi.

- (c) Stabilire se l'equazione $4 \log x - x = 1$ ammette una soluzione nell'intervallo $[1, e]$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{3/4}}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

- i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x) dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]
- ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{-2t}.$$

- i) Determinare l'integrale generale.
- ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA \leq 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \bar{z}^2$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$