

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Correzione Appello del 09.02.2026

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-\frac{1}{|x-1|}}$$

- (a) determinare il dominio, il segno ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità;
- (b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti e prolungamenti per continuità;
- (c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento:

- (a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La funzione è positiva sul suo dominio perché prodotto di funzioni positive ed è continua nel dominio perché composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie perché il dominio non è simmetrico.
- (b) Consideriamo dapprima i limiti in $\pm\infty$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Passando ora al limite in 1 si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{e^{\frac{1}{x-1}}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{e^{\frac{1}{1-x}}} = 0, \end{aligned}$$

per cui $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ e di conseguenza f è prolungabile per continuità in $x = 1$. La funzione prolungata è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1, \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

- (c) La funzione $\tilde{f}$ è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ perché composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R} \setminus \{1\})$. Per $x \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= 2(x-1)e^{-\frac{1}{|x-1|}} + (x-1)^2 e^{-\frac{1}{|x-1|}} \left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{|x-1|^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{|x-1|}} (2(x-1) + \operatorname{sgn}(x-1)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-1|}} (2x-1) & x > 1, \\ e^{-\frac{1}{|x-1|}} (2x-3) & x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

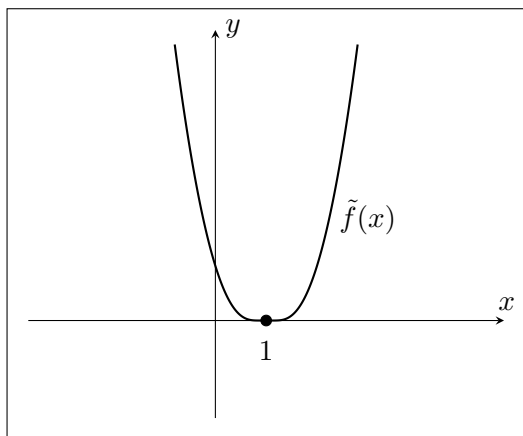
Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{f}'(x) = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è derivabile anche in $x_0 = 1$ con derivata uguale a 0.

Studiamo il segno della derivata prima per dedurre la monotonia. Per ogni $x > 1$ si ha $\tilde{f}'(x) > 0$ dato che $2x - 1 > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 1$ si ha $\tilde{f}'(x) < 0$ dato che $2x - 3 < 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona decrescente. Abbiamo quindi ottenuto che $x_0 = 1$ è punto di minimo relativo. Poiché $\tilde{f}$ è sempre positiva, il punto è di minimo globale. Si ha $\min \tilde{f} = \tilde{f}(1) = 0$, $\sup \tilde{f} = +\infty$.

(d) Il grafico della funzione segue:



Esercizio 2 (punti 8) (a) Determinare l'ordine di infinito o infinitesimo della successione

$$a_n = \frac{\sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{n^3}}{n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right]}$$

e stabilire se a_n è positiva o negativa da un certo N in poi (definitivamente).

(b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per a_n del punto (a).

Svolgimento: (a) Utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin si ha

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{3}{n^3}}{n \left[1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right]} = \frac{\frac{7}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{7}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Questo significa che a_n ha ordine di infinitesimo pari a 2 ed è definitivamente positiva, essendo asintotica ad una successione definitivamente positiva.

(b) Grazie al fatto che a_n è definitivamente positiva posso applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, deduco allora che anche la serie in esame è convergente.

Esercizio 3 (punti 8) Data la funzione $f_a(x) = x^{a/2}|x - a|e^{-ax}$:

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 f_2(x) dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x|x-2|e^{-2x} dx = \int_0^2 x(2-x)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx \\ &= -\int_0^2 x(x-2)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito integrando per parti. Nella prima integrazione per parti uso $f(x) = x(x-2)$ da cui $f'(x) = 2x-2$ e $g'(x) = e^{-2x}$ per cui una scelta di g è $g(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$. Nella seconda integrazione per parti uso invece $f(x) = x-1$ per cui $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^{-2x}$, per cui scelgo $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int x(x-2)e^{-2x} dx &= -(x^2-2x)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (2x-2)\frac{e^{-2x}}{2} dx = (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (x-1)e^{-2x} dx \\ &= (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + (x-1)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) dx \\ &= (2x-x^2-x+1)\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = (x-x^2+1-\frac{1}{2})\frac{e^{-2x}}{2} \\ &= (2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare I resta dunque da valutarlo agli estremi

$$\begin{aligned} I &= -\left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= -2(4-8+1)\frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} + (6-18+1)\frac{e^{-6}}{4} \\ &= \frac{6e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{11e^{-6}}{4} = \frac{6e^2 + e^6 - 11}{4e^6}. \end{aligned}$$

(b) La funzione integranda è positiva quindi posso applicare il criterio del confronto asintotico.

Per $a > 0$ l'unico estremo d'integrazione impropria è $+\infty$. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{\frac{a}{2}+1}e^{-ax} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

poiché per gerarchia degli infiniti $e^{-ax} = o(x^{-\frac{a}{2}-3})$ per $x \rightarrow \infty$. Poiché $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, anche l'integrale in esame converge per il criterio del confronto asintotico.

Per $a < 0$ ho due estremi di integrazione impropria. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_a(x) \sim |a|x^{\frac{a}{2}}.$$

Dunque l'integrale converge in 0 se e solo se $-a/2 < 1$ ovvero se $a > -2$. Per $x \rightarrow \infty$, vale come sopra $f_a(x) \sim x^{\frac{a}{2}+1}e^{-ax} = x^{-\frac{|a|}{2}+1}e^{|a|x}$, che stavolta ha limite $+\infty$ per gerarchia degli infiniti. L'integrale dunque diverge a $+\infty$ per ogni $a < 0$.

Per $a = 0$ si ha $f_0(x) = |x|$ il cui integrale tra 0 e $+\infty$ diverge.

In definitiva l'integrale converge se e solo se $a > 0$.

Esercizio 4 (punti 8) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ay' + a^2y = e^{4t}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del second'ordine lineare non omogenea. Le soluzioni si trovano dunque come

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t),$$

dove y_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare che si trova per somiglianza.

Per trovare y_0 studio $y_0'' - 2ay_0' + a^2y_0 = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \iff (\lambda - a)^2 = 0$. Tale equazione ammette un solo zero (doppio) pari a $\lambda = a$. L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque

$$y_0(t) = C_1e^{at} + C_2te^{at}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La forma della soluzione particolare $\tilde{y}$ dipende dal parametro a .

Se $a \neq 4$, cerco $\tilde{y}(t) = Ce^{4t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = 4Ce^{4t}$ e $\tilde{y}''(t) = 16Ce^{4t}$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale si ottiene:

$$16Ce^{4t} - 8Ca e^{4t} + Ca^2e^{4t} = e^{4t} \iff C(16 - 8a + a^2) = 1 \iff C = \frac{1}{(a-4)^2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{e^{4t}}{(a-4)^2}$.

Se $a = 4$, cerco $\tilde{y}(t) = Ct^2e^{4t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = 2Ce^{4t}(t + 2t^2)$, $\tilde{y}''(t) = 2Ce^{4t}(1 + 8t + 8t^2)$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale si ottiene:

$$Ce^{4t}(2 + 16t + 16t^2 - 16t - 32t^2 + 16t^2) = e^{4t} \iff C = \frac{1}{2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{t^2e^{4t}}{2}$.

In conclusione, si ha

$$y(t) = \begin{cases} C_1e^{at} + C_2te^{at} + \frac{e^{4t}}{(a-4)^2} & a \neq 4 \\ (C_1 + C_2t + \frac{t^2}{2})e^{4t} & a = 4, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 09.02.2026

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 2)^2 e^{-\frac{1}{|x-2|}}$$

- (a) determinare il dominio, il segno ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità;
- (b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti e prolungamenti per continuità;
- (c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento

- (a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva sul suo dominio perché prodotto di funzioni positive ed è continua nel dominio perché composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie perché il dominio non è simmetrico.
- (b) Consideriamo dapprima i limiti in $\pm\infty$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-2|}} = 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Passando ora al limite in 1 si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)^2}{e^{\frac{1}{x-2}}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2}{e^{\frac{1}{2-x}}} = 0, \end{aligned}$$

per cui $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ e di conseguenza f è prolungabile per continuità in $x = 2$. La funzione prolungata è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 2, \\ 0 & x = 2. \end{cases}$$

- (c) La funzione $\tilde{f}$ è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{2\})$ perché composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R} \setminus \{2\})$. Per $x \neq 2$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= 2(x-2)e^{-\frac{1}{|x-2|}} + (x-2)^2 e^{-\frac{1}{|x-2|}} \left(\frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{|x-2|^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{|x-2|}} (2(x-2) + \operatorname{sgn}(x-2)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-2|}} (2x-3) & x > 2, \\ e^{-\frac{1}{|x-2|}} (2x-5) & x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

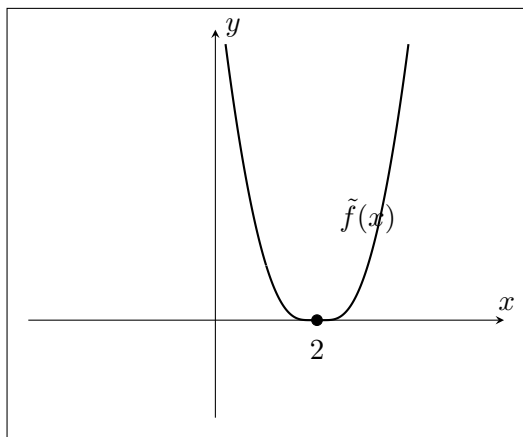
Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \tilde{f}'(x) = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è derivabile anche in $x_0 = 2$ con derivata uguale a 0.

Studiamo il segno della derivata prima per dedurre la monotonia. Per ogni $x > 2$ si ha $\tilde{f}'(x) > 0$ dato che $2x - 3 > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 2$ si ha $\tilde{f}'(x) < 0$ dato che $2x - 5 < 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona decrescente. Abbiamo quindi ottenuto che $x_0 = 2$ è punto di minimo relativo. Poiché $\tilde{f}$ è sempre positiva, il punto è di minimo globale. Si ha $\min \tilde{f} = \tilde{f}(2) = 0$, $\sup \tilde{f} = +\infty$.

(d) Il grafico della funzione segue:



Esercizio 2 (punti 8) (a) Determinare l'ordine di infinito o infinitesimo della successione

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^3}}{n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right]}$$

e stabilire se a_n è positiva o negativa da un certo N in poi (definitivamente).

(b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per a_n del punto (a).

Svolgimento: (a) Utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin si ha

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{2}{n^3}}{n \left[1 + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \right]} = \frac{\frac{13}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{13}{12n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Questo significa che a_n ha ordine di infinitesimo pari a 1 ed è definitivamente positiva, essendo asintotica ad una successione definitivamente positiva.

(b) Grazie al fatto che a_n è definitivamente positiva posso applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, deduco allora che anche la serie in esame è divergente.

Esercizio 3 (punti 8) Data la funzione $f_a(x) = x^a |x - 2a| e^{-2ax}$:

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 f_1(x) dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x|x-2|e^{-2x} dx = \int_0^2 x(2-x)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx \\ &= -\int_0^2 x(x-2)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito integrando per parti. Nella prima integrazione per parti uso $f(x) = x(x-2)$ da cui $f'(x) = 2x-2$ e $g'(x) = e^{-2x}$ per cui una scelta di g è $g(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$. Nella seconda integrazione per parti uso invece $f(x) = x-1$ per cui $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^{-2x}$, per cui scelgo $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int x(x-2)e^{-2x} dx &= -(x^2-2x)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (2x-2)\frac{e^{-2x}}{2} dx = (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (x-1)e^{-2x} dx \\ &= (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + (x-1)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) dx \\ &= (2x-x^2-x+1)\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = (x-x^2+1-\frac{1}{2})\frac{e^{-2x}}{2} \\ &= (2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare I resta dunque da valutarlo agli estremi

$$\begin{aligned} I &= -\left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= -2(4-8+1)\frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} + (6-18+1)\frac{e^{-6}}{4} \\ &= \frac{6e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{11e^{-6}}{4} = \frac{6e^2 + e^6 - 11}{4e^6}. \end{aligned}$$

(b) La funzione integranda è positiva quindi posso applicare il criterio del confronto asintotico.

Per $a > 0$ l'unico estremo d'integrazione impropria è $+\infty$. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a+1}e^{-2ax} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

poiché per gerarchia degli infiniti $e^{-2ax} = o(x^{-a-3})$ per $x \rightarrow \infty$. Poiché $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, anche l'integrale in esame converge per il criterio del confronto asintotico.

Per $a < 0$ ho due estremi di integrazione impropria. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_a(x) \sim |2a|x^a.$$

Dunque l'integrale converge in 0 se e solo se $-a < 1$ ovvero se $a > -1$. Per $x \rightarrow \infty$, vale come sopra $f_a(x) \sim x^{a+1}e^{-2ax} = x^{-|a|+1}e^{2|a|x}$, che stavolta ha limite $+\infty$ per gerarchia degli infiniti. L'integrale dunque diverge a $+\infty$ per ogni $a < 0$.

Per $a = 0$ si ha $f_0(x) = |x|$ il cui integrale tra 0 e $+\infty$ diverge.

In definitiva l'integrale converge se e solo se $a > 0$.

Esercizio 4 (punti 8) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ay' + a^2y = e^{3t}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del second'ordine lineare non omogenea. Le soluzioni si trovano dunque come

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t),$$

dove y_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare che si trova per somiglianza.

Per trovare y_0 studio $y_0'' - 2ay_0' + a^2y_0 = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \iff (\lambda - a)^2 = 0$. Tale equazione ammette un solo zero (doppio) pari a $\lambda = a$. L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque

$$y_0(t) = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La forma della soluzione particolare $\tilde{y}$ dipende dal parametro a .

Se $a \neq 3$, cerco $\tilde{y}(t) = C e^{3t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = 3C e^{3t}$ e $\tilde{y}''(t) = 9C e^{3t}$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale si ottiene:

$$9C e^{3t} - 6C a e^{3t} + C a^2 e^{3t} = e^{3t} \iff C(9 - 6a + a^2) = 1 \iff C = \frac{1}{(a-3)^2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{e^{3t}}{(a-3)^2}$.

Se $a = 3$, cerco $\tilde{y}(t) = C t^2 e^{3t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = C e^{3t}(2t + 3t^2)$, $\tilde{y}''(t) = C e^{3t}(2 + 12t + 9t^2)$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale $\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = e^{3t}$ si ottiene:

$$C e^{3t} (2 + 12t + 9t^2 - 12t - 18t^2 + 9t^2) = e^{3t} \iff C = \frac{1}{2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{t^2 e^{3t}}{2}$.

In conclusione, si ha

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^{3t}}{(a-3)^2} & a \neq 3 \\ (C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2}) e^{3t} & a = 3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \rightarrow 0$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 09.02.2026

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 3)^2 e^{-\frac{1}{|x-3|}}$$

- (a) determinare il dominio, il segno ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità;
- (b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti e prolungamenti per continuità;
- (c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento

- (a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. La funzione è positiva sul suo dominio perché prodotto di funzioni positive ed è continua nel dominio perché composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie perché il dominio non è simmetrico.
- (b) Consideriamo dapprima i limiti in $\pm\infty$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-3|}} = 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Passando ora al limite in 1 si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)^2}{e^{\frac{1}{x-3}}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)^2}{e^{\frac{1}{3-x}}} = 0, \end{aligned}$$

per cui $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ e di conseguenza f è prolungabile per continuità in $x = 3$. La funzione prolungata è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 3, \\ 0 & x = 3. \end{cases}$$

- (c) La funzione $\tilde{f}$ è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{3\})$ perché composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R} \setminus \{3\})$. Per $x \neq 3$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= 2(x-3)e^{-\frac{1}{|x-3|}} + (x-3)^2 e^{-\frac{1}{|x-3|}} \left(\frac{\operatorname{sgn}(x-3)}{|x-3|^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{|x-3|}} (2(x-3) + \operatorname{sgn}(x-3)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-3|}} (2x-5) & x > 3, \\ e^{-\frac{1}{|x-3|}} (2x-7) & x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

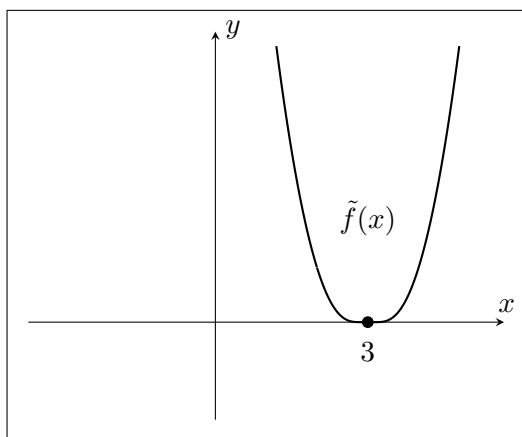
Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \tilde{f}'(x) = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è derivabile anche in $x_0 = 3$ con derivata uguale a 0.

Studiamo il segno della derivata prima per dedurre la monotonia. Per ogni $x > 3$ si ha $\tilde{f}'(x) > 0$ dato che $2x - 5 > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 3$ si ha $\tilde{f}'(x) < 0$ dato che $2x - 7 < 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona decrescente. Abbiamo quindi ottenuto che $x_0 = 3$ è punto di minimo relativo. Poiché $\tilde{f}$ è sempre positiva, il punto è di minimo globale. Si ha $\min \tilde{f} = \tilde{f}(3) = 0$, $\sup \tilde{f} = +\infty$.

(d) Il grafico della funzione segue:



Esercizio 2 (punti 8) (a) Determinare l'ordine di infinito o infinitesimo della successione

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{4}{n^3}}{n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right]}$$

e stabilire se a_n è positiva o negativa da un certo N in poi (definitivamente).

(b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per a_n del punto (a).

Svolgimento: (a) Utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin si ha

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{4}{n^3}}{n \left[1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \right]} = \frac{\frac{21}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{7}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Questo significa che a_n ha ordine di infinitesimo pari a 2 ed è definitivamente positiva, essendo asintotica ad una successione definitivamente positiva.

(b) Grazie al fatto che a_n è definitivamente positiva posso applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, deduco allora che anche la serie in esame è convergente.

Esercizio 3 (punti 8) Data la funzione $f_a(x) = e^{-ax}|a - x|x^{a/2}$:

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 f_2(x) dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x|x-2|e^{-2x} dx = \int_0^2 x(2-x)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx \\ &= -\int_0^2 x(x-2)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito integrando per parti. Nella prima integrazione per parti uso $f(x) = x(x-2)$ da cui $f'(x) = 2x-2$ e $g'(x) = e^{-2x}$ per cui una scelta di g è $g(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$. Nella seconda integrazione per parti uso invece $f(x) = x-1$ per cui $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^{-2x}$, per cui scelgo $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int x(x-2)e^{-2x} dx &= -(x^2-2x)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (2x-2)\frac{e^{-2x}}{2} dx = (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (x-1)e^{-2x} dx \\ &= (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + (x-1)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) dx \\ &= (2x-x^2-x+1)\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = (x-x^2+1-\frac{1}{2})\frac{e^{-2x}}{2} \\ &= (2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare I resta dunque da valutarlo agli estremi

$$\begin{aligned} I &= -\left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= -2(4-8+1)\frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} + (6-18+1)\frac{e^{-6}}{4} \\ &= \frac{6e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{11e^{-6}}{4} = \frac{6e^2 + e^6 - 11}{4e^6}. \end{aligned}$$

(b) La funzione integranda è positiva quindi posso applicare il criterio del confronto asintotico.

Per $a > 0$ l'unico estremo d'integrazione impropria è $+\infty$. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{\frac{a}{2}+1}e^{-ax} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

poiché per gerarchia degli infiniti $e^{-ax} = o(x^{-\frac{a}{2}-3})$ per $x \rightarrow \infty$. Poiché $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, anche l'integrale in esame converge per il criterio del confronto asintotico.

Per $a < 0$ ho due estremi di integrazione impropria. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_a(x) \sim |a|x^{\frac{a}{2}}.$$

Dunque l'integrale converge in 0 se e solo se $-\frac{a}{2} < 1$ ovvero se $a > -2$. Per $x \rightarrow \infty$, vale come sopra $f_a(x) \sim x^{\frac{a}{2}+1}e^{-ax} = x^{-\frac{|a|}{2}+1}e^{2|a|x}$, che stavolta ha limite $+\infty$ per gerarchia degli infiniti. L'integrale dunque diverge a $+\infty$ per ogni $a < 0$.

Per $a = 0$ si ha $f_0(x) = |x|$ il cui integrale tra 0 e $+\infty$ diverge.

In definitiva l'integrale converge se e solo se $a > 0$.

Esercizio 4 (punti 8) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ay' + a^2y = e^{2t}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del second'ordine lineare non omogenea. Le soluzioni si trovano dunque come

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t),$$

dove y_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare che si trova per somiglianza.

Per trovare y_0 studio $y_0'' - 2ay_0' + a^2y_0 = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \iff (\lambda - a)^2 = 0$. Tale equazione ammette un solo zero (doppio) pari a $\lambda = a$. L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque

$$y_0(t) = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La forma della soluzione particolare $\tilde{y}$ dipende dal parametro a .

Se $a \neq 2$, cerco $\tilde{y}(t) = C e^{2t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = 2C e^{2t}$ e $\tilde{y}''(t) = 4C e^{2t}$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale si ottiene:

$$C e^{2t} (4 - 4a + a^2) = e^{2t} \iff C(4 - 4a + a^2) = 1 \iff C = \frac{1}{(a-2)^2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{e^{2t}}{(a-2)^2}$.

Se $a = 2$, cerco $\tilde{y}(t) = C t^2 e^{2t}$, da cui $\tilde{y}'(t) = 2C e^{2t}(t + t^2)$, $\tilde{y}''(t) = 2C e^{2t}(1 + 4t + 2t^2)$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale $\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = e^{2t}$ si ottiene:

$$C e^{2t} (2 + 8t + 4t^2 - 8t - 8t^2 + 4t^2) = e^{2t} \iff C = \frac{1}{2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{t^2 e^{2t}}{2}$.

In conclusione, si ha

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^{2t}}{(a-2)^2} & a \neq 2 \\ (C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2}) e^{2t} & a = 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \rightarrow 0$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 09.02.2026

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 4)^2 e^{-\frac{1}{|x-4|}}$$

- (a) determinare il dominio, il segno ed eventuali simmetrie di f e discuterne la continuità;
- (b) calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti e prolungamenti per continuità;
- (c) calcolare la derivata prima e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Svolgimento

- (a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. La funzione è positiva sul suo dominio perché prodotto di funzioni positive ed è continua nel dominio perché composizione di funzioni continue. Non ci sono simmetrie perché il dominio non è simmetrico.
- (b) Consideriamo dapprima i limiti in $\pm\infty$. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{|x-4|}} = 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Passando ora al limite in 1 si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)^2}{e^{\frac{1}{x-4}}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)^2}{e^{\frac{1}{4-x}}} = 0, \end{aligned}$$

per cui $\exists \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ e di conseguenza f è prolungabile per continuità in $x = 4$. La funzione prolungata è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 4, \\ 0 & x = 4. \end{cases}$$

- (c) La funzione $\tilde{f}$ è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{4\})$ perché composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R} \setminus \{4\})$. Per $x \neq 4$ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= 2(x-4)e^{-\frac{1}{|x-4|}} + (x-4)^2 e^{-\frac{1}{|x-4|}} \left(\frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{|x-4|^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{|x-4|}} (2(x-4) + \operatorname{sgn}(x-4)) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-3|}} (2x-7) & x > 4, \\ e^{-\frac{1}{|x-3|}} (2x-9) & x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

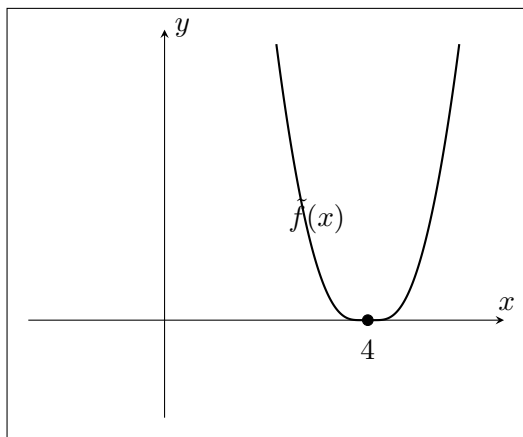
Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \tilde{f}'(x) = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è derivabile anche in $x_0 = 4$ con derivata uguale a 0.

Studiamo il segno della derivata prima per dedurre la monotonia. Per ogni $x > 4$ si ha $\tilde{f}'(x) > 0$ dato che $2x - 7 > 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona crescente. Se $x < 4$ si ha $\tilde{f}'(x) < 0$ dato che $2x - 9 < 0$ e quindi la funzione è strettamente monotona decrescente. Abbiamo quindi ottenuto che $x_0 = 4$ è punto di minimo relativo. Poiché $\tilde{f}$ è sempre positiva, il punto è di minimo globale. Si ha $\min \tilde{f} = \tilde{f}(4) = 0$, $\sup \tilde{f} = +\infty$.

(d) Il grafico della funzione segue:



Esercizio 2 (punti 8) (a) Determinare l'ordine di infinito o infinitesimo della successione

$$a_n = \frac{\sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{6}{n^3}}{n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} - 1 \right]}$$

e stabilire se a_n è positiva o negativa da un certo N in poi (definitivamente).

(b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per a_n del punto (a).

Svolgimento: (a) Utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin si ha

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{6}{n^3}}{n \left[1 + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \right]} = \frac{\frac{35}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{35}{12n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Questo significa che a_n ha ordine di infinitesimo pari a 1 ed è definitivamente positiva, essendo asintotica ad una successione definitivamente positiva.

(b) Grazie al fatto che a_n è definitivamente positiva posso applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, deduco allora che anche la serie in esame è divergente.

Esercizio 3 (punti 8) Data la funzione $f_a(x) = e^{-2ax}|2a - x|x^a$:

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 f_1(x) dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Svolgimento:

(a) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x|x-2|e^{-2x} dx = \int_0^2 x(2-x)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx \\ &= -\int_0^2 x(x-2)e^{-2x} dx + \int_2^3 x(x-2)e^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito integrando per parti. Nella prima integrazione per parti uso $f(x) = x(x-2)$ da cui $f'(x) = 2x-2$ e $g'(x) = e^{-2x}$ per cui una scelta di g è $g(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$. Nella seconda integrazione per parti uso invece $f(x) = x-1$ per cui $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^{-2x}$, per cui scelgo $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int x(x-2)e^{-2x} dx &= -(x^2-2x)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (2x-2)\frac{e^{-2x}}{2} dx = (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + \int (x-1)e^{-2x} dx \\ &= (2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{2} + (x-1)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) - \int \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) dx \\ &= (2x-x^2-x+1)\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = (x-x^2+1-\frac{1}{2})\frac{e^{-2x}}{2} \\ &= (2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare I resta dunque da valutarlo agli estremi

$$\begin{aligned} I &= -\left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[(2x-2x^2+1)\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= -2(4-8+1)\frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} + (6-18+1)\frac{e^{-6}}{4} \\ &= \frac{6e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{11e^{-6}}{4} = \frac{6e^2 + e^6 - 11}{4e^6}. \end{aligned}$$

(b) La funzione integranda è positiva quindi posso applicare il criterio del confronto asintotico.

Per $a > 0$ l'unico estremo d'integrazione impropria è $+\infty$. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$:

$$f_a(x) \sim x^{a+1}e^{-2ax} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

poiché per gerarchia degli infiniti $e^{-2ax} = o(x^{-a-3})$ per $x \rightarrow \infty$. Poiché $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, anche l'integrale in esame converge per il criterio del confronto asintotico.

Per $a < 0$ ho due estremi di integrazione impropria. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_a(x) \sim |2a|x^a.$$

Dunque l'integrale converge in 0 se e solo se $-a < 1$ ovvero se $a > -1$. Per $x \rightarrow \infty$, vale come sopra $f_a(x) \sim x^{a+1}e^{-2ax} = x^{-|a|+1}e^{2|a|x}$, che stavolta ha limite $+\infty$ per gerarchia degli infiniti. L'integrale dunque diverge a $+\infty$ per ogni $a < 0$.

Per $a = 0$ si ha $f_0(x) = |x|$ il cui integrale tra 0 e $+\infty$ diverge.

In definitiva l'integrale converge se e solo se $a > 0$.

Esercizio 4 (punti 8) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ay' + a^2y = e^t$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Si tratta di un'equazione del second'ordine lineare non omogenea. Le soluzioni si trovano dunque come

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t),$$

dove y_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare che si trova per somiglianza.

Per trovare y_0 studio $y_0'' - 2ay_0' + a^2y_0 = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \iff (\lambda - a)^2 = 0$. Tale equazione ammette un solo zero (doppio) pari a $\lambda = a$. L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque

$$y_0(t) = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La forma della soluzione particolare $\tilde{y}$ dipende dal parametro a .

Se $a \neq 1$, cerco $\tilde{y}(t) = C e^t$, da cui $\tilde{y}'(t) = C e^t$ e $\tilde{y}''(t) = C e^t$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale si ottiene:

$$C e^t (1 - 2a + a^2) = e^t \iff C(1 - 2a + a^2) = 1 \iff C = \frac{1}{(a-1)^2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{e^t}{(a-1)^2}$.

Se $a = 1$, cerco $\tilde{y}(t) = C t^2 e^t$, da cui $\tilde{y}'(t) = C e^t (2t + t^2)$, $\tilde{y}''(t) = C e^{2t} (2 + 4t + t^2)$. Imponendo la validità dell'equazione differenziale $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = e^t$ si ottiene:

$$C e^t (2 + 4t + t^2 - 4t - 2t^2 + t^2) = e^t \iff C = \frac{1}{2}.$$

La soluzione particolare è dunque $\tilde{y}(t) = \frac{t^2 e^t}{2}$.

In conclusione, si ha

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2} & a \neq 1 \\ (C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2}) e^t & a = 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \rightarrow 0$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$