ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 30.06.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 1

1. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto.

   (b) Enunciare il teorema di Lagrange.

   (c) Usando la definizione precedente, stabilire se la funzione
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-2/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$
   è derivabile in $x = 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di successione convergente.

   (b) Stabilire se la successione
   $$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \sin n \cos n + (-1)^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$
   ha limite finito.

   (c) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\lim_n a_n = 0$. Mostrare che vale
   $$\lim_n \frac{\sin(a_n)}{\sqrt{a_n}} = 0.$$

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-1+|x-1|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-2)]^a}{\sqrt{x^2-4}}.$$

(a) Calcolare: $\int_2^3 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_2^3 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k!)\left(\frac{2}{k}\right)^k \log k.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - y = t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z+Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 30.06.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 2

1. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto.

   (b) Enunciare il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti.

   (c) Usando la definizione precedente, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

   è derivabile in $x = 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di successione convergente.

   (b) Stabilire se la successione

$$a_n = \begin{cases} n^3 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sin^2 n + (-1)^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   ha limite finito.

   (c) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_n a_n = \infty$. Mostrare che vale

$$\lim_n \sqrt[3]{a_n} \sin(1/a_n) = 0.$$

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-2 + |x-2|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-5)]^a}{\sqrt{x^2-25}}.$$

(a) Calcolare: $\int_5^6 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_5^6 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k!)\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^k \log^2 k.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y = t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2\right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 30.06.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 3

1. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto.

   (b) Enunciare il teorema di Rolle.

   (c) Usando la definizione precedente, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2/x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   è derivabile in $x = 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di successione divergente.

   (b) Stabilire se la successione

$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sin n \cos n + (-1)^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   ha limite finito.

   (c) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_n a_n = \infty$. Mostrare che vale

$$\lim_n \sqrt{a_n} \sin(1/a_n) = 0.$$

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-3 + |x-3|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-3)]^a}{\sqrt{x^2-9}}.$$

(a) Calcolare: $\int_3^4 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_3^4 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k!)\left(\frac{\pi}{2k}\right)^k \log k.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - y = -t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 30.06.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - Tema 4

1. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto.

   (b) Enunciare il teorema di Fermat.

   (c) Usando la definizione precedente, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   è derivabile in $x = 0$.

2. (a) Scrivere la definizione di successione divergente.

   (b) Stabilire se la successione

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \cos^2 n + (-1)^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

   ha limite finito.

   (c) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\lim_n a_n = 0$. Mostrare che vale

$$\lim_n \frac{\sin(a_n)}{\sqrt[3]{a_n}} = 0.$$

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-4 + |x-4|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-4)]^a}{\sqrt{x^2-16}}.$$

(a) Calcolare: $\int_4^5 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_4^5 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k!)\left(\frac{e}{2k}\right)^k \log^2 k.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y = -t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$