ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-1+|x-1|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a) Affinché il logaritmo sia definito va risolto il sistema:

$$\frac{-1+|x-1|}{x^2} > 0, \quad x \neq 0.$$

La disequazione equivale a $|x-1| > 1$, le cui soluzioni sono

$$x-1 < -1 \quad \text{oppure} \quad x-1 > 1,$$

cioè $x < 0$ oppure $x > 2$. Pertanto si ha che $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Dato che il dominio non è simmetrico rispetto al punto 0, la funzione non è né pari né dispari. Studiamo il segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{-1+|x-1|}{x^2} \geq 1 \iff \Big(|x-1| \geq x^2+1 \quad \text{e} \quad x \neq 0\Big).$$

Sia $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Osserviamo che:

1. per $x < 0 < 1$ la disequazione diventa

   $$-(x-1) \geq x^2+1 \iff x^2+x \geq 0 \iff x(x+1) \geq 0.$$

   Siccome $x < 0$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ e $f(-1) = 0$.

2. per $x > 2 > 1$ la disequazione diventa

   $$x-1 \geq x^2+1 \iff x^2-x+2 \leq 0.$$

   Siccome $x^2-x+2 \leq 0$ ha $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$, si deduce che per $x > 2$ la disequazione non ammette soluzioni. Pertanto $f(x) < 0$ per $x > 2$.

In conclusione, $x = -1$ è l'unico punto dove $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

(b) I punti di accumulazione per $\mathrm{Dom}(f)$ sono $-\infty$, 0 da sinistra, 2 da destra, $+\infty$. Osserviamo inoltre che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-2}{x^2}\right) & \text{se } x > 2 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per $x \to -\infty$, l'argomento del logaritmo tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Per $x \to 0^-$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$.

Per $x \to 2^+$, l'argomento del logaritmo tende tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

Per $x \to +\infty$, l'argomento del logaritmo è $(x-2)/x^2$ che tende a 0 da destra grazie al segno della frazione ed al fatto che il denominatore è un infinito di ordine superiore al numeratore. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Da quanto visto sopra, possiamo concludere che: non esistono asintoti orizzontali, la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, la retta $x = 2$ è asintoto verticale destro, la funzione non ammette né massimo né minimo globale.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$. In tale regione $f(x) = \log(-1/x)$; pertanto, operando la sostituzione $u = -1/x$, il teorema di sostituzione per i limiti ci consente di scrivere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-1/x)}{x} = \lim_{u\to0^+} \frac{\log u}{(-1/u)} = -\lim_{u\to0^+} (u \log u) = 0,$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $-\infty$.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $+\infty$. In tale regione $f(x) = \log((x-2)/x^2)$; pertanto si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{x-2}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2) - 2\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x} = 0$$

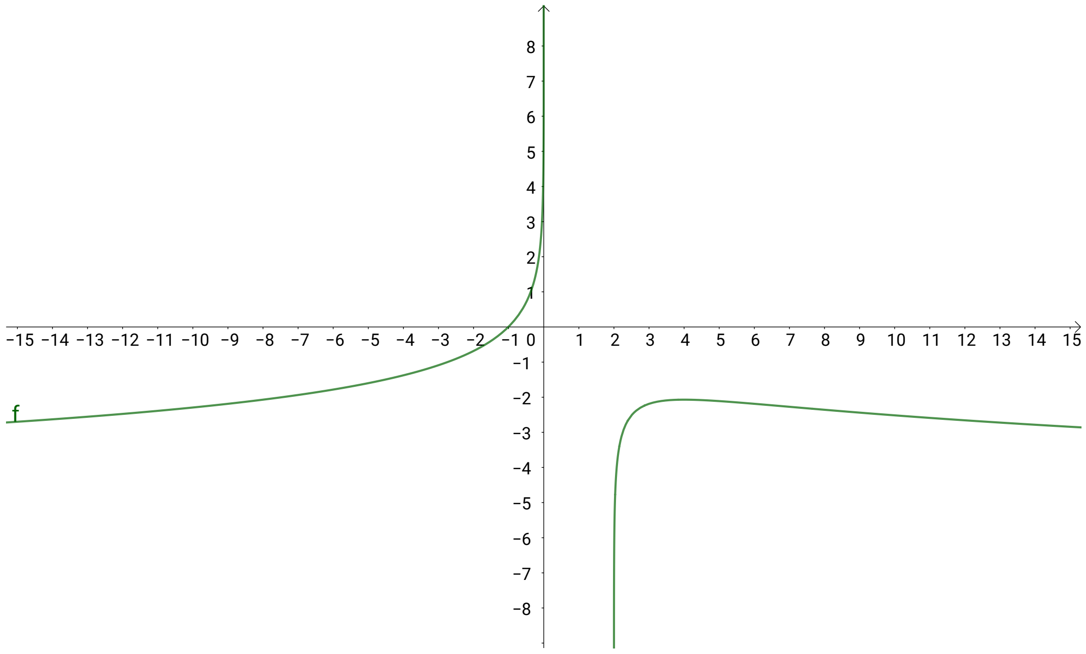
grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $+\infty$.

(c) Continuità: f è composta di funzioni continue ove definite, e quindi essa stessa è continua sul proprio dominio. Derivabilità: f è composta di funzioni differenziabili ove definite, con eccezione della funzione valore assoluto che è non derivabile quando $x - 1 = 0$, cioè per $x = 1$, che tuttavia non appartiene al dominio di f. Quindi, sul proprio dominio, f è derivabile. Per il calcolo di f', ricordiamo che $f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-2}{x^2}\right) & \text{se } x > 2 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ da cui segue

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{x(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$. Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $x < 0$. Inoltre, per $x > 2$ abbiamo che $x(x-2) > 0$ e quindi in tale semiretta: ($f'(x) > 0$ se e solo se $4 - x > 0$). Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $2 < x < 4$ e $f(x)$ è strettamente decrescente per $x > 4$. Inoltre il punto $x_0 = 4$ è punto critico, e grazie alla monotonia precedentemente studiata, possiamo concludere che $x_0 = 4$ è un punto di massimo locale. Si noti infine che $f(4) = \log((4-2)/16) = \log(1/8) = -\log 8 = -3\log 2$.

Ricordiamo che non esistono punti estremali globali grazie ad i limiti precedentemente studiati.



(d) Un grafico qualitativo è il sottostante.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-2)]^a}{\sqrt{x^2-4}}.$$

(a) Calcolare: $\int_2^3 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_2^3 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i) Abbiamo

$$\int_2^3 f_0(x)\ dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx.$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $(2,3]$ ma non è definita in $x=2$, quindi l'integrale è un integrale generalizzato il cui valore è dato da

$$\int_2^3 f_0(x)\ dx = \lim_{\alpha\to 2^+} \int_\alpha^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx.$$

Notiamo che $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \left(\sqrt{x^2-4}\right)'$ per cui, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\int_2^3 f_0(x)\ dx = \lim_{\alpha\to 2^+} \left[\sqrt{x^2-4}\right]_{x=\alpha}^{x=3} = \lim_{\alpha\to 2^+} \left(\sqrt{5} - \sqrt{\alpha^2-4}\right) = \sqrt{5}.$$

(ii) Per $x \in (2,3]$ si ha $x-2 \in (0,1]$ e quindi $\sin(x-2) > 0$ per $x \in (2,3]$, da cui $f_a(x)$ è ben definita e continua su $(2,3]$. Per discutere la convergenza applichiamo il criterio del confronto asintotico. Notiamo

che $f_a(x) \geq 0$ per $x \in (2,3)$ e che, essendo $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x\sin^a(x-2)}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)^a}{\sqrt{x^2-4}} \Big(\frac{\sin(x-2)}{x-2}\Big)^a = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)^a}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} (x-2)^{a-1/2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1/2 \\ 1 & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2. \end{cases}$$

Si noti che per $a \geq 1/2$, la funzione $f_a(x)$ ammette limite finito per x tendente a 2 da destra; pertanto l'integrale in questi casi è un integrale di Riemann e non vi sono problemi di convergenza.

Si noti inoltre che per $a < 1/2$, la funzione $f_a(x)$ è un infinito di ordine $1/2 - a$ per x tendente a 2 da destra. Di conseguenza, per $a < 1/2$ la funzione $f_a(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(2,3]$ se e solo se $(x-2)^{a-1/2}$ lo è. Ricordando la caratterizzazione della convergenza degli integrali degli infiniti fondamentali ciò accade se e solo se $0 < 1/2 - a < 1$, cioè se e solo se $-1/2 < a < 1/2$.

In conclusione, l'integrale richiesto è convergente (o di Riemann) se e solo se $a > -1/2$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k!) \left(\frac{2}{k}\right)^k \log k.$$

Svolgimento. Sia a_k il termine generale della serie. Per $k \geq 2$ abbiamo $a_k > 0$ Ne segue che convergenza assoluta e semplice coincidono. Per stabilire il carattere di convergenza della serie applichiamo il criterio del rapporto. Ricordando che $\lim_{k\to+\infty}(1+1/k)^k = e$, si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!2^{k+1}\log(k+1)}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!2^k \log k} = \lim_{k\to+\infty} 2\frac{\log(k+1)}{\log k} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}$$
$$= \lim_{k\to+\infty} 2\frac{\log k + \log(1+1/k)}{\log k} \frac{1}{(1+1/k)^k} = \lim_{k\to+\infty} 2\Big(1 + \frac{\log(1+1/k)}{\log k}\Big)\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{-k}$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1.$$

Dato che il valore di tale limite è minore di 1, il criterio del rapporto permette di concludere che la serie in esame è convergente.

[In alternativa questo esercizio poteva anche essere svolto utilizzando la formula di Stirling.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - y = t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Svolgimento. (a) L'equazione differenziale assegnata è del secondo ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti. Come noto, l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \overline{y}(t), \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''(t) - y(t) = 0$, mentre $\overline{y}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea. Per l'equazione omogenea, il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, le cui radici sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Pertanto $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$. Per la soluzione particolare $\overline{y}(t)$ possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Si ottiene che $\overline{y}(t) = At + B$, dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono da determinare. Osservando che $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$, la funzione $\overline{y}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea se e solo se $0 - (At + B) = t$. Pertanto $A = -1$, $B = 0$ e $\overline{y}(t) = -t$. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Osservato che $y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 - 1 = 1 \end{cases} \iff c_1 = 2, c_2 = 0.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy in questione è quindi $y(t) = 2e^t - t$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento. Notiamo che se $z \in A$, allora, necessariamente, $z \neq 0$. Rappresentando z in forma algebrica, $z = x + iy$, e ricordato che $|z^2| = |z|^2$, si ha

$$z \in A \iff \frac{|2x + iy|^2}{x^2 + 2y^2} \geq 2 \iff \frac{4x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} \geq 2 \overset{x+iy \in A}{\iff} 4x^2 + y^2 \geq 2x^2 + 4y^2 \iff y^2 \leq \frac{2}{3} x^2$$

ovvero $|y| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} |x|$ (con $(x, y) \neq (0, 0)$).

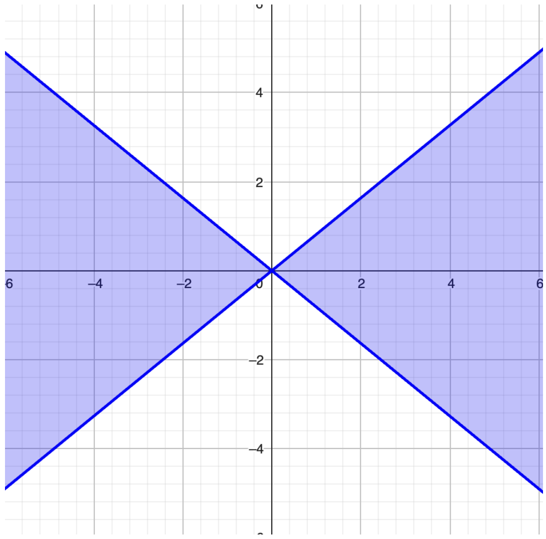
Quindi, nel caso in cui $\mathrm{Re}(z) > 0$ ($x > 0$), la regione A sta "sotto" la retta di equazione $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}(z)$ e "sopra" la retta di equazione $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}(z)$ (il punto $(0, 0)$ è escluso). Inoltre, nel caso in cui $\mathrm{Re}(z) < 0$ ($x < 0$), la regione A sta "sopra" la retta di equazione $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}(z)$ e "sotto" la retta di equazione $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}(z)$ (il punto $(0, 0)$ è escluso).

Il disegno sul piano di Gauss è il sottostante (il punto $(0, 0)$ è escluso):

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$



ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-2+|x-2|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a) Affinché il logaritmo sia definito va risolto il sistema:

$$\frac{-2+|x-2|}{x^2} > 0, \quad x \neq 0.$$

La disequazione equivale a $|x-2| > 2$, le cui soluzioni sono

$$x-2 < -2 \quad \text{oppure} \quad x-2 > 2,$$

cioè $x < 0$ oppure $x > 4$. Pertanto si ha che $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

Dato che il dominio non è simmetrico rispetto al punto 0, la funzione non è né pari né dispari. Studiamo il segno:

$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2+|x-2|}{x^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(|x-2| \geq x^2+2 \quad \text{e} \quad x \neq 0\Big).$$

Sia $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Osserviamo che:

1. per $x < 0 < 2$ la disequazione diventa

$$-(x-2) \geq x^2 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x+1) \geq 0.$$

   Siccome $x < 0$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ e $f(-1) = 0$.

2. per $x > 4 > 2$ la disequazione diventa

$$x - 2 \geq x^2 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x + 4 \leq 0.$$

   Siccome $x^2 - x + 4 \leq 0$ ha $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$, si deduce che per $x > 4$ la disequazione non ammette soluzioni. Pertanto $f(x) < 0$ per $x > 4$.

In conclusione, $x = -1$ è l'unico punto dove $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

(b) I punti di accumulazione per $\mathrm{Dom}(f)$ sono $-\infty$, 0 da sinistra, 4 da destra, $+\infty$. Osserviamo inoltre che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-4}{x^2}\right) & \text{se } x > 4 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per $x \to -\infty$, l'argomento del logaritmo tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Per $x \to 0^-$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Per $x \to 4^+$, l'argomento del logaritmo tende tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$.

Per $x \to +\infty$, l'argomento del logaritmo è $(x-4)/x^2$ che tende a 0 da destra grazie al segno della frazione ed al fatto che il denominatore è un infinito di ordine superiore al numeratore. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Da quanto visto sopra, possiamo concludere che: non esistono asintoti orizzontali, la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, la retta $x = 4$ è asintoto verticale destro, la funzione non ammette né massimo né minimo globale.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$. In tale regione $f(x) = \log(-1/x)$; pertanto, operando la sostituzione $u = -1/x$, il teorema di sostituzione per i limiti ci consente di scrivere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-1/x)}{x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\log u}{(-1/u)} = -\lim_{u\to 0^+} (u \log u) = 0,$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $-\infty$.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $+\infty$. In tale regione $f(x) = \log((x-4)/x^2)$; pertanto si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{x-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-4) - 2\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-4)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x} = 0$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $+\infty$.

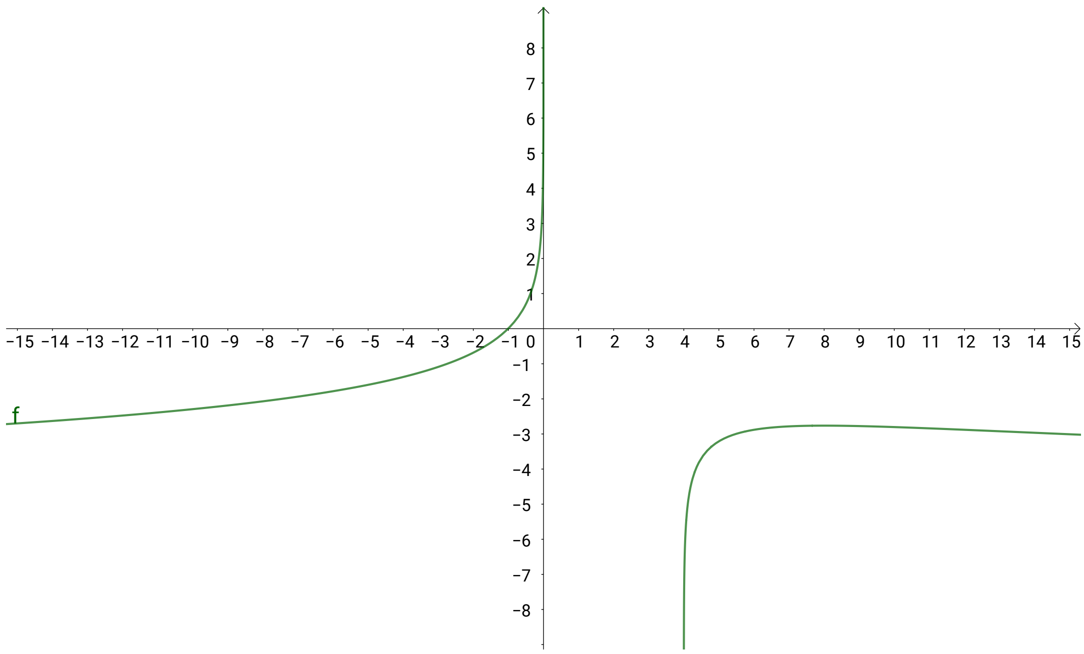
(c) Continuità: f è composta di funzioni continue ove definite, e quindi essa stessa è continua sul proprio dominio. Derivabilità: f è composta di funzioni differenziabili ove definite, con eccezione della funzione valore assoluto che è non derivabile quando $x - 2 = 0$, cioè per $x = 2$, che tuttavia non appartiene al dominio di f. Quindi, sul proprio dominio, f è derivabile. Per il calcolo di f', ricordiamo che $f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-4}{x^2}\right) & \text{se } x > 4 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ da cui segue

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{8-x}{x(x-4)} & \text{se } x > 4 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$. Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $x < 0$. Inoltre, per $x > 4$ abbiamo che $x(x-4) > 0$ e quindi in tale semiretta: ($f'(x) > 0$ se e solo se $8 - x > 0$). Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $4 < x < 8$ e $f(x)$ è strettamente decrescente per $x > 8$. Inoltre il punto $x_0 = 8$ è punto critico, e grazie alla monotonia precedentemente studiata, possiamo concludere che $x_0 = 8$ è un punto di massimo locale. Si noti infine che $f(8) = \log((8-4)/64) = \log(1/16) = -\log 16 = -4\log 2$.

Ricordiamo che non esistono punti estremali globali grazie ad i limiti precedentemente studiati.

(d) Un grafico qualitativo è il sottostante.



Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-5)]^a}{\sqrt{x^2-25}}.$$

(a) Calcolare: $\int_5^6 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_5^6 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i) Abbiamo

$$\int_5^6 f_0(x)\;dx = \int_5^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\;dx.$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $(5,6]$ ma non è definita in $x=5$, quindi l'integrale è un integrale generalizzato il cui valore è dato da

$$\int_5^6 f_0(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 5^+}\int_\alpha^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx.$$

Notiamo che $\frac{x}{\sqrt{x^2-25}} = \left(\sqrt{x^2-25}\right)'$ per cui, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\int_5^6 f_0(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 2^+}\left[\sqrt{x^2-25}\right]_{x=\alpha}^{x=6} = \lim_{\alpha\to 5^+}\left(\sqrt{11}-\sqrt{\alpha^2-25}\right) = \sqrt{11}.$$

(ii) Per $x\in(5,6]$ si ha $x-5\in(0,1]$ e quindi $\sin(x-5)>0$ per $x\in(5,6]$, da cui $f_a(x)$ è ben definita e continua su $(5,6]$. Per discutere la convergenza applichiamo il criterio del confronto asintotico. Notiamo che $f_a(x)\geq 0$ per $x\in(5,6)$ e che, essendo $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+}\frac{x\sin^a(x-5)}{\sqrt{x^2-25}} &= \lim_{x\to 5^+}\frac{x(x-5)^a}{\sqrt{x^2-25}}\Big(\frac{\sin(x-5)}{x-5}\Big)^a = \lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-5)^a}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}\\ &= \lim_{x\to 5^+}(x-5)^{a-1/2} = \begin{cases}+\infty & \text{se } a<1/2\\ 1 & \text{se } a=1/2\\ 0 & \text{se } a>1/2.\end{cases}\end{aligned}$$

Si noti che per $a\geq 1/2$, la funzione $f_a(x)$ ammette limite finito per x tendente a 5 da destra; pertanto l'integrale in questi casi è un integrale di Riemann e non vi sono problemi di convergenza.

Si noti inoltre che per $a<1/2$, la funzione $f_a(x)$ è un infinito di ordine $1/2-a$ per x tendente a 5 da destra. Di conseguenza, per $a<1/2$ la funzione $f_a(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(5,6]$ se e solo se $(x-2)^{a-1/2}$ lo è. Ricordando la caratterizzazione della convergenza degli integrali degli infiniti fondamentali ciò accade se e solo se $0<1/2-a<1$, cioè se e solo se $-1/2<a<1/2$.

In conclusione, l'integrale richiesto è convergente (o di Riemann) se e solo se $a>-1/2$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k!)\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^k\log^2 k.$$

Svolgimento. Sia a_k il termine generale della serie. Per $k\geq 2$ abbiamo $a_k>0$ Ne segue che convergenza assoluta e semplice coincidono. Per stabilire il carattere di convergenza della serie applichiamo il criterio del rapporto. Ricordando che $\lim_{k\to+\infty}(1+1/k)^k=e$, si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)!\sqrt{2^{k+1}}\log^2(k+1)}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!\sqrt{2^k}\log^2 k} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\frac{\log^2(k+1)}{\log^2 k}\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}\\ &= \lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\frac{[\log k+\log(1+1/k)]^2}{\log^2 k}\frac{1}{(1+1/k)^k} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\Big(1+\frac{\log(1+1/k)}{\log k}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{-k}\\ &= \sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{e} = \frac{\sqrt{2}}{e}<1.\end{aligned}$$

Dato che il valore di tale limite è minore di 1, il criterio del rapporto permette di concludere che la serie in esame è convergente.

[In alternativa questo esercizio poteva anche essere svolto utilizzando la formula di Stirling.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y = t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Svolgimento. (a) L'equazione differenziale assegnata è del secondo ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti. Come noto, l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \overline{y}(t),\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''(t) - 2y(t) = 0$, mentre $\overline{y}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea. Per l'equazione omogenea, il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$, le cui radici sono $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$. Pertanto $y_1(t) = e^{\sqrt{2}t}$, $y_2(t) = e^{-\sqrt{2}t}$. Per la soluzione particolare $\overline{y}(t)$ possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Si ottiene che $\overline{y}(t) = At + B$, dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono da determinare. Osservando che $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$, la funzione $\overline{y}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea se e solo se $0 - 2(At + B) = t$. Pertanto $A = -1/2$, $B = 0$ e $\overline{y}(t) = -t/2$. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Osservato che $y'(t) = c_1\sqrt{2}e^t - c_2\sqrt{2}e^{-t} - 1/2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1\sqrt{2} - c_2\sqrt{2} - 1/2 = 1 \end{cases} \iff c_1 = 1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}, c_2 = 1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy in questione è quindi $y(t) = \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}t} + \left(1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}t} - t/2$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento. Vedere lo svolgimento del Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-3 + |x-3|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a) Affinché il logaritmo sia definito va risolto il sistema:

$$\frac{-3 + |x-3|}{x^2} > 0, \quad x \neq 0.$$

La disequazione equivale a $|x-3| > 3$, le cui soluzioni sono

$$x - 3 < -3 \quad \text{oppure} \quad x - 3 > 3,$$

cioè $x < 0$ oppure $x > 6$. Pertanto si ha che $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$.

Dato che il dominio non è simmetrico rispetto al punto 0, la funzione non è né pari né dispari. Studiamo il segno:

$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-3 + |x-3|}{x^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(|x-3| \geq x^2 + 3 \quad \text{e} \quad x \neq 0\Big).$$

Sia $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Osserviamo che:

1. per $x < 0 < 3$ la disequazione diventa

$$-(x-3) \geq x^2 + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x+1) \geq 0.$$

   Siccome $x < 0$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ e $f(-1) = 0$.

2. per $x > 6 > 3$ la disequazione diventa

$$x - 3 \geq x^2 + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x + 6 \leq 0.$$

   Siccome $x^2 - x + 6 \leq 0$ ha $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$, si deduce che per $x > 6$ la disequazione non ammette soluzioni. Pertanto $f(x) < 0$ per $x > 6$.

In conclusione, $x = -1$ è l'unico punto dove $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$.

(b) I punti di accumulazione per $\mathrm{Dom}(f)$ sono $-\infty$, 0 da sinistra, 6 da destra, $+\infty$. Osserviamo inoltre che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-6}{x^2}\right) & \text{se } x > 3 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per $x \to -\infty$, l'argomento del logaritmo tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Per $x \to 0^-$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Per $x \to 6^+$, l'argomento del logaritmo tende tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 6^+} f(x) = -\infty$.

Per $x \to +\infty$, l'argomento del logaritmo è $(x-6)/x^2$ che tende a 0 da destra grazie al segno della frazione ed al fatto che il denominatore è un infinito di ordine superiore al numeratore. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Da quanto visto sopra, possiamo concludere che: non esistono asintoti orizzontali, la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, la retta $x = 4$ è asintoto verticale destro, la funzione non ammette né massimo né minimo globale.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$. In tale regione $f(x) = \log(-1/x)$; pertanto, operando la sostituzione $u = -1/x$, il teorema di sostituzione per i limiti ci consente di scrivere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-1/x)}{x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\log u}{(-1/u)} = -\lim_{u\to 0^+} (u \log u) = 0,$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $-\infty$.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $+\infty$. In tale regione $f(x) = \log((x-6)/x^2)$; pertanto si ha che

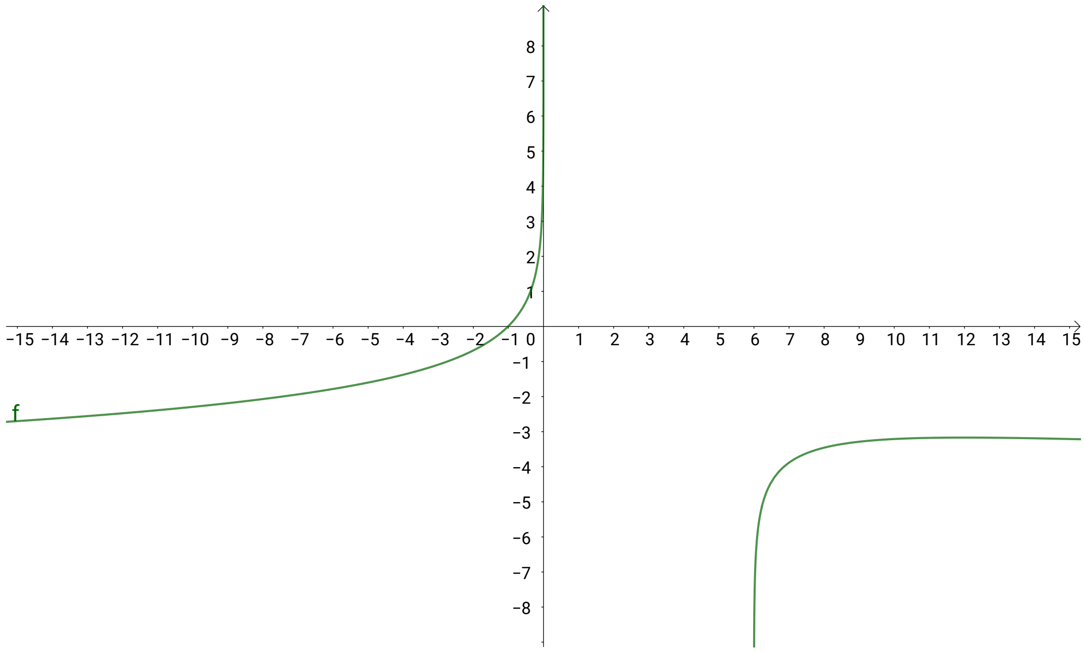
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{x-6}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-6) - 2\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-6)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x} = 0$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $+\infty$.

(c) Continuità: f è composta di funzioni continue ove definite, e quindi essa stessa è continua sul proprio dominio. Derivabilità: f è composta di funzioni differenziabili ove definite, con eccezione della funzione valore assoluto che è non derivabile quando $x - 3 = 0$, cioè per $x = 3$, che tuttavia non appartiene al dominio di f. Quindi, sul proprio dominio, f è derivabile. Per il calcolo di f', ricordiamo che $f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-6}{x^2}\right) & \text{se } x > 4 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ da cui segue

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{12-x}{x(x-6)} & \text{se } x > 4 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$. Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $x < 0$. Inoltre, per $x > 6$ abbiamo che $x(x-6) > 0$ e quindi in tale semiretta: ($f'(x) > 0$ se e solo se $12 - x > 0$). Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $6 < x < 12$ e $f(x)$ è strettamente decrescente per $x > 12$. Inoltre il punto $x_0 = 8$ è punto critico, e grazie alla monotonia precedentemente studiata, possiamo concludere che $x_0 = 8$ è un punto di massimo locale. Si noti infine che $f(12) = \log((12-6)/144) = \log(1/24) = -\log 24 = -3\log 2 - \log 3$.



Ricordiamo che non esistono punti estremali globali grazie ad i limiti precedentemente studiati.

(d) Un grafico qualitativo è il sottostante.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-3)]^a}{\sqrt{x^2-9}}.$$

(a) Calcolare: $\int_3^4 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_3^4 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i) Abbiamo

$$\int_3^4 f_0(x)\ dx = \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\ dx.$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $(3,4]$ ma non è definita in $x=3$, quindi l'integrale è un integrale generalizzato il cui valore è dato da

$$\int_3^4 f_0(x)\ dx = \lim_{\alpha\to 3^+}\int_\alpha^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\ dx.$$

Notiamo che $\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \left(\sqrt{x^2-9}\right)'$ per cui, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\int_3^4 f_0(x)\ dx = \lim_{\alpha\to 3^+}\left[\sqrt{x^2-9}\right]_{x=\alpha}^{x=4} = \lim_{\alpha\to 3^+}\left(\sqrt{7}-\sqrt{\alpha^2-9}\right) = \sqrt{7}.$$

(ii) Per $x \in (3,4]$ si ha $x-3 \in (0,1]$ e quindi $\sin(x-3) > 0$ per $x \in (3,4]$, da cui $f_a(x)$ è ben definita e continua su $(3,4]$. Per discutere la convergenza applichiamo il criterio del confronto asintotico. Notiamo

che $f_a(x) \geq 0$ per $x \in (3,4)$ e che, essendo $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x \sin^a(x-3)}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)^a}{\sqrt{x^2-9}} \left(\frac{\sin(x-3)}{x-3}\right)^a = \lim_{x\to 3^+} \frac{x(x-3)^a}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} (x-3)^{a-1/2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1/2 \\ 1 & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2. \end{cases}$$

Si noti che per $a \geq 1/2$, la funzione $f_a(x)$ ammette limite finito per x tendente a 3 da destra; pertanto l'integrale in questi casi è un integrale di Riemann e non vi sono problemi di convergenza.

Si noti inoltre che per $a < 1/2$, la funzione $f_a(x)$ è un infinito di ordine $1/2 - a$ per x tendente a 3 da destra. Di conseguenza, per $a < 1/2$ la funzione $f_a(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(3,4]$ se e solo se $(x-3)^{a-1/2}$ lo è. Ricordando la caratterizzazione della convergenza degli integrali degli infiniti fondamentali ciò accade se e solo se $0 < 1/2 - a < 1$, cioè se e solo se $-1/2 < a < 1/2$.

In conclusione, l'integrale richiesto è convergente (o di Riemann) se e solo se $a > -1/2$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k!) \left(\frac{\pi}{2k}\right)^k \log k.$$

Svolgimento. Sia a_k il termine generale della serie. Per $k \geq 2$ abbiamo $a_k > 0$ Ne segue che convergenza assoluta e semplice coincidono. Per stabilire il carattere di convergenza della serie applichiamo il criterio del rapporto. Ricordando che $\lim_{k\to+\infty}(1+1/k)^k = e$, si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!\pi^{k+1}\log(k+1)}{2^{k+1}(k+1)^{k+1}} \frac{2^k k^k}{k!\pi^k \log k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{\log(k+1)}{\log k} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{\log k + \log(1+1/k)}{\log k} \frac{1}{(1+1/k)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\log(1+1/k)}{\log k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1.$$

Dato che il valore di tale limite è minore di 1, il criterio del rapporto permette di concludere che la serie in esame è convergente.

[In alternativa questo esercizio poteva anche essere svolto utilizzando la formula di Stirling.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - y = -t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Svolgimento. (a) L'equazione differenziale assegnata è del secondo ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti. Come noto, l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \overline{y}(t),\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''(t) - y(t) = 0$, mentre $\overline{y}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea. Per l'equazione omogenea, il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, le cui radici sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Pertanto $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$. Per la soluzione particolare $\overline{y}(t)$ possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Si ottiene che $\overline{y}(t) = At + B$, dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono da determinare. Osservando che $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$, la funzione $\overline{y}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea se e solo se $0 - (At + B) = -t$. Pertanto $A = 1$, $B = 0$ e $\overline{y}(t) = t$. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Osservato che $y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 + 1 = 2 \end{cases} \iff c_1 = 1, c_2 = 0.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy in questione è quindi $y(t) = e^t + t$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento. Vedere lo svolgimento del Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-4 + |x-4|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a) Affinché il logaritmo sia definito va risolto il sistema:

$$\frac{-4 + |x-4|}{x^2} > 0, \quad x \neq 0.$$

La disequazione equivale a $|x-4| > 4$, le cui soluzioni sono

$$x - 4 < -4 \quad \text{oppure} \quad x - 4 > 4,$$

cioè $x < 0$ oppure $x > 8$. Pertanto si ha che $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$.

Dato che il dominio non è simmetrico rispetto al punto 0, la funzione non è né pari né dispari. Studiamo il segno:

$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-4 + |x-4|}{x^2} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(|x-4| \geq x^2 + 4 \quad \text{e} \quad x \neq 0\Big).$$

Sia $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Osserviamo che:

1. per $x < 0 < 4$ la disequazione diventa

$$-(x-4) \geq x^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x+1) \geq 0.$$

   Siccome $x < 0$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ e $f(-1) = 0$.

2. per $x > 8 > 4$ la disequazione diventa

$$x - 4 \geq x^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x + 8 \leq 0.$$

   Siccome $x^2 - x + 8 \leq 0$ ha $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 < 0$, si deduce che per $x > 8$ la disequazione non ammette soluzioni. Pertanto $f(x) < 0$ per $x > 8$.

In conclusione, $x = -1$ è l'unico punto dove $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$, $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (8, +\infty)$.

(b) I punti di accumulazione per $\mathrm{Dom}(f)$ sono $-\infty$, 0 da sinistra, 8 da destra, $+\infty$. Osserviamo inoltre che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-8}{x^2}\right) & \text{se } x > 8 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per $x \to -\infty$, l'argomento del logaritmo tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Per $x \to 0^-$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Per $x \to 8^+$, l'argomento del logaritmo tende tende a 0 da destra. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to 8^+} f(x) = -\infty$.

Per $x \to +\infty$, l'argomento del logaritmo è $(x-8)/x^2$ che tende a 0 da destra grazie al segno della frazione ed al fatto che il denominatore è un infinito di ordine superiore al numeratore. Per il teorema sui limiti per sostituzione, si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Da quanto visto sopra, possiamo concludere che: non esistono asintoti orizzontali, la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, la retta $x = 4$ è asintoto verticale destro, la funzione non ammette né massimo né minimo globale.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$. In tale regione $f(x) = \log(-1/x)$; pertanto, operando la sostituzione $u = -1/x$, il teorema di sostituzione per i limiti ci consente di scrivere che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-1/x)}{x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\log u}{(-1/u)} = -\lim_{u\to 0^+} (u \log u) = 0,$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $-\infty$.

Studiamo la presenza di un asintoto obliquo a $+\infty$. In tale regione $f(x) = \log((x-6)/x^2)$; pertanto si ha che

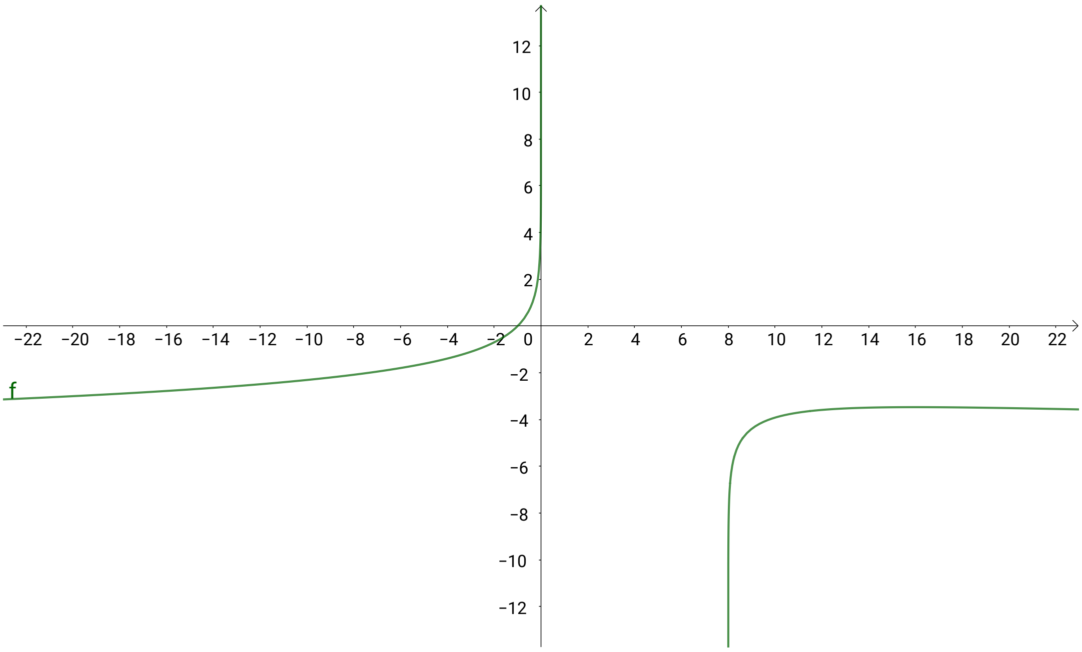
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{x-8}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-8) - 2\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-8)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x} = 0$$

grazie ai limiti notevoli mostrati a lezione. Si conclude che non vi è asintoto obliquo a $+\infty$.

(c) Continuità: f è composta di funzioni continue ove definite, e quindi essa stessa è continua sul proprio dominio. Derivabilità: f è composta di funzioni differenziabili ove definite, con eccezione della funzione valore assoluto che è non derivabile quando $x - 4 = 0$, cioè per $x = 4$, che tuttavia non appartiene al dominio di f. Quindi, sul proprio dominio, f è derivabile. Per il calcolo di f', ricordiamo che $f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x-8}{x^2}\right) & \text{se } x > 4 \\ \log(-\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ da cui segue

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{16-x}{x(x-8)} & \text{se } x > 4 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$. Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $x < 0$. Inoltre, per $x > 8$ abbiamo che $x(x-8) > 0$ e quindi in tale semiretta: ($f'(x) > 0$ se e solo se $16 - x > 0$). Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente per $8 < x < 16$ e $f(x)$ è strettamente decrescente per $x > 16$. Inoltre il punto $x_0 = 16$ è punto critico, e grazie alla monotonia precedentemente studiata, possiamo concludere che $x_0 = 16$ è un punto di massimo locale. Si noti infine che $f(16) = \log((16-8)/256) = \log(1/32) = -\log 32 = -5\log 2 - \log 3$.



Ricordiamo che non esistono punti estremali globali grazie ad i limiti precedentemente studiati.

(d) Un grafico qualitativo è il sottostante.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia definita

$$f_a(x) = \frac{x\,[\sin(x-4)]^a}{\sqrt{x^2-16}}.$$

(a) Calcolare: $\int_4^5 f_0(x)\,dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_4^5 f_a(x)\,dx$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i) Abbiamo

$$\int_4^5 f_0(x)\; dx = \int_4^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\; dx.$$

La funzione integranda è ben definita e continua su $(4,5]$ ma non è definita in $x=4$, quindi l'integrale è un integrale generalizzato il cui valore è dato da

$$\int_4^5 f_0(x)\; dx = \lim_{\alpha\to 4^+} \int_\alpha^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\; dx.$$

Notiamo che $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}} = \left(\sqrt{x^2-16}\right)'$ per cui, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\int_4^5 f_0(x)\; dx = \lim_{\alpha\to 4^+} \left[\sqrt{x^2-16}\right]_{x=\alpha}^{x=5} = \lim_{\alpha\to 4^+} \left(3 - \sqrt{\alpha^2-25}\right) = 3.$$

(ii) Per $x \in (4,5]$ si ha $x-4 \in (0,1]$ e quindi $\sin(x-4) > 0$ per $x \in (4,5]$, da cui $f_a(x)$ è ben definita e continua su $(4,5]$. Per discutere la convergenza applichiamo il criterio del confronto asintotico. Notiamo

che $f_a(x) \geq 0$ per $x \in (4,5)$ e che, essendo $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x\sin^a(x-4)}{\sqrt{x^2-16}} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x(x-4)^a}{\sqrt{x^2-16}} \Big(\frac{\sin(x-4)}{x-4}\Big)^a = \lim_{x\to 4^+} \frac{x(x-4)^a}{\sqrt{(x-4)(x+4)}}$$

$$= \lim_{x\to 4^+} (x-4)^{a-1/2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1/2 \\ 1 & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2. \end{cases}$$

Si noti che per $a \geq 1/2$, la funzione $f_a(x)$ ammette limite finito per x tendente a 4 da destra; pertanto l'integrale in questi casi è un integrale di Riemann e non vi sono problemi di convergenza.

Si noti inoltre che per $a < 1/2$, la funzione $f_a(x)$ è un infinito di ordine $1/2 - a$ per x tendente a 4 da destra. Di conseguenza, per $a < 1/2$ la funzione $f_a(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(4,5]$ se e solo se $(x-4)^{a-1/2}$ lo è. Ricordando la caratterizzazione della convergenza degli integrali degli infiniti fondamentali ciò accade se e solo se $0 < 1/2 - a < 1$, cioè se e solo se $-1/2 < a < 1/2$.

In conclusione, l'integrale richiesto è convergente (o di Riemann) se e solo se $a > -1/2$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k!) \left(\frac{e}{2k}\right)^k \log^2 k.$$

Svolgimento. Sia a_k il termine generale della serie. Per $k \geq 2$ abbiamo $a_k > 0$ Ne segue che convergenza assoluta e semplice coincidono. Per stabilire il carattere di convergenza della serie applichiamo il criterio del rapporto. Ricordando che $\lim_{k\to+\infty}(1+1/k)^k = e$, si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!e^{k+1}\log^2(k+1)}{2^{k+1}(k+1)^{k+1}} \frac{2^k k^k}{k! e^k \log^2 k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e}{2} \frac{\log^2(k+1)}{\log^2 k} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{e}{2} \frac{[\log k + \log(1+1/k)]^2}{\log^2 k} \frac{1}{(1+1/k)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e}{2} \Big(1 + \frac{\log(1+1/k)}{\log k}\Big)^2 \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{-k} \\ &= \frac{e}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Dato che il valore di tale limite è minore di 1, il criterio del rapporto permette di concludere che la serie in esame è convergente.

[In alternativa questo esercizio poteva anche essere svolto utilizzando la formula di Stirling.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y = -t.$$

(a) Determinare l'integrale generale.

(b) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.

Svolgimento. (a) L'equazione differenziale assegnata è del secondo ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti. Come noto, l'integrale generale ha la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \overline{y}(t), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''(t) - 2y(t) = 0$, mentre $\overline{y}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea. Per l'equazione omogenea, il polinomio caratteristico associato è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$, le cui radici sono $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$. Pertanto $y_1(t) = e^{\sqrt{2}t}$, $y_2(t) = e^{-\sqrt{2}t}$. Per la soluzione particolare $\overline{y}(t)$ possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Si ottiene che $\overline{y}(t) = At + B$, dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono da determinare. Osservando che $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$, la funzione $\overline{y}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea se e solo se $0 - 2(At + B) = -t$. Pertanto $A = 1/2$, $B = 0$ e $\overline{y}(t) = t/2$. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Osservato che $y'(t) = c_1\sqrt{2}e^t - c_2\sqrt{2}e^{-t} + 1/2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1\sqrt{2} - c_2\sqrt{2} + 1/2 = 2 \end{cases} \iff c_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1), c_2 = \frac{3}{4\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1).$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy in questione è quindi $y(t) = \frac{3}{4\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t} + \frac{3}{4\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t} + t/2$.

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Nel piano di Gauss, si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; \frac{|z + Re(z)|^2}{|z^2| + (Im(z))^2} \geq 2 \right\}.$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento. Vedere lo svolgimento del Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$