ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(2\arctan(|x|^3)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D =]-\infty, +\infty[$. Evidentemente f è pari, quindi basta limitarsi allo studio su $[0, +\infty[$. Poiché $2\arctan|x|^3 \in [0, \pi[$, f è sempre positiva ed inoltre $f = 0$ sse $x = 0$. Limiti: c'è un solo limite interessante, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sin\pi = 0$, da cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.

ii) Essendo f composizione di funzioni derivabili, eccetto per $x = 0$, risulta

$$f'(x) = \cos\left(2\arctan|x|^3\right)\frac{6x^2 \operatorname{sgn} x}{1+x^6}, \ \forall x \neq 0.$$

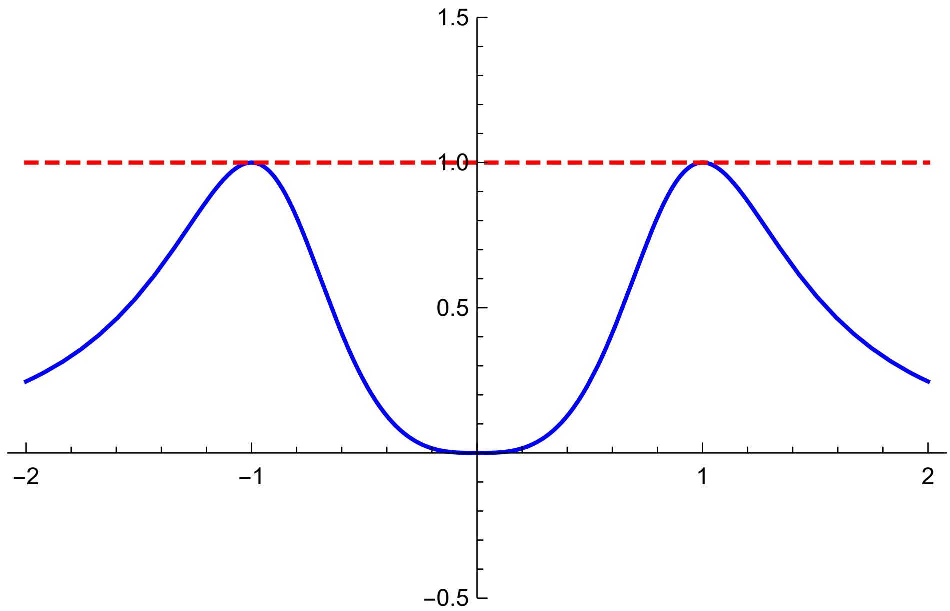
Per $x = 0$ chiaramente f è continua e siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

per il test di derivabilità si evince che $\exists f'(0) = 0$. Per la monotonia, studiamo il segno di f': per $x > 0$,

$$f'(x) \geqslant 0, \iff \cos\left(2\arctan x^3\right) \geqslant 0, \iff 2\arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{2}, \iff \arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{4}, \iff x^3 \leqslant 1,$$

cioè per $x \leqslant 1$. Dunque f è crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, +\infty[$. Si deduce facilmente la monotonia su D e che $x = 0$ è punto di minimo globale mentre $x = \pm 1$ sono massimi globali.



Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \big(1+\sin x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log\dots\}$".

Svolgimento. Per $x \longrightarrow 0+$, $1+\sin x \longrightarrow 1$ mentre

$$x^a \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } a>0,\\ 1, & \text{se } a=0,\\ +\infty, & \text{se } a<0. \end{cases}$$

Poiché $1^0=1$ e $1^1=1$ si deduce che il limite vale 1 per ogni $a \geqslant 0$. Per $a<0$, $1^{+\infty}$ è forma indeterminata. Poiché

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \log(1+\sin x)},$$

ricordato che $\log(1+t)=t1_t$ e che $\sin x = x1_x$ abbiamo

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \sin x \cdot 1_x} = e^{x^{a+1}1_x} \longrightarrow \begin{cases} e^0=1, & \text{se } -1<a<0,\\ e^1=e, & \text{se } a=-1,\\ e^{+\infty}=+\infty, & \text{se } a<-1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+5)(z^2+z+1)=0.$$

Svolgimento. Chiaramente

$$(z^3+5)(z^2+z+1)=0, \quad \Longleftrightarrow \quad z^3=-5,\ \vee\ z^2+z+1=0.$$

Nel primo caso, si tratta di calcolare le radici terze di -5. Premesso che $-5=5u(\pi)$ ($u(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$), per la formula di De Moivre, $z=\rho u(\theta)$ è t.c.

$$z^3=-5, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3=5,\\ \\ \theta=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3},\ k=0,1,2, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z=\sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ -\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nel secondo caso,

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha\in\mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t}+2e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha=1$.

ii) Determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Abbiamo che

$$\int \tfrac{e^{2t}+2e^t}{e^t-1}\ dt \overset{u=e^t,\ t=\log u,\ dt=du/u}{=} \int \tfrac{u^2+2u}{(u-1)}\tfrac{du}{u} = \int \tfrac{u+2}{u-1}\ du = \int \left(1+\tfrac{3}{u-1}\right)\ du$$

$$= u + 3\log|u-1| = e^t + 3\log|e^t-1|.$$

ii) Considerato che $f_\alpha \in C(]0,1])$, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\ dt$ è generalizzato in 0. Essendo $f_\alpha \geqslant 0$ su $]0,1]$, possiamo applicare il test del confronto asintotico per stabilire la convergenza dell'integrale. Notiamo che

$$f_\alpha(t) = \frac{3_t}{(e^t-1)^\alpha} = \frac{3_t}{(t1_t)^\alpha} \sim_{0+} \frac{3}{t^\alpha},$$

per cui esiste $\int_0^1 f_\alpha$ sse esiste $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ dt$, sse $\alpha < 1$ come ben noto.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\sin x)^n n}{n^2+\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{n3^n|\sin x|^n}{n^2+\sqrt{n}}.$$

A tal fine, applichiamo il test della radice: essendo

$$|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}3|\sin x|}{n^{2/n}1_n} \longrightarrow 3|\sin x|,\ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

(ricordiamo che $n^{1/n} \longrightarrow 1$) abbiamo che:

- se $3|\sin x| < 1$ (cioè $|\sin x| < \frac{1}{3}$ ovvero, essendo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, sse $x \in]-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3[$), la serie converge assolutamente (quindi anche semplicemente);
- se $3|\sin x| > 1$ (cioè per $[-\pi/2, \pi/2] \backslash [-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3]$), la serie diverge assolutamente e poiché il test dice in questo caso che $|a_n| \longrightarrow +\infty$, la condizione necessaria di convergenza non è verificata, per cui la serie non converge nemmeno semplicemente.

Rimangono i casi $\sin x = \pm\frac{1}{3}$, nei quali il test precedente fallisce. Per $\sin x = 1/3$, la serie diventa

$$\sum_n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \sim \sum_n \frac{1}{n},\ \text{divergente.}$$

Essendo a termini di segno costante, convergenza semplice e assoluta coincidono (quindi non c'è alcun tipo di convergenza). Infine, per $\sin x = -1/3$,

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}},$$

che è una serie a termini di segno alternato. La convergenza assoluta ritorna al caso precedente (quindi è esclusa). Per la convergenza semplice possiamo applicare il test di Leibniz purché

$$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \searrow 0.$$

La convergenza a 0 è evidente. Per la monotonia possiamo procedere direttamente oppure introdurre la funzione ausiliaria $f(x) := \frac{x}{x^2+\sqrt{x}}$ ed osservare che

$$f'(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - x(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x^2 + \sqrt{x})^2} = \frac{-x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2}}{(x^2 + \sqrt{x})^2}.$$

Siccome $f' \leqslant 0$ sse $-x^2 + \sqrt{x}/2 \leqslant 0$ ovvero $x^{3/2} \geqslant \frac{1}{2}$, in particolare per $n \geqslant 1$ si ha $f(n) \searrow$, da cui la conclusione: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per il test di Leibniz.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Svolgimento. Dall'ipotesi segue che $(n+1)a_{n+1} \geqslant na_n$, cioé (na_n) è crescente: allora $na_n \geqslant a_1 > 0$, da cui $a_n \geqslant \frac{a_1}{n}$ per ogni $n \geqslant 1$. Ma allora, la serie diverge per confronto con la serie armonica.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2020

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin\big(2\arctan(|x|^3)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento.

i)

Dominio. Chiaramente $D =]-\infty, +\infty[$.

Segno. Poiché $-1 \le \sin\varphi \le 1$ per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \le f(x) \le 2.$$

Inoltre

$$f(x) = 0 \iff 1 - \sin\big(2\arctan(|x|^3)\big) = 0 \iff 2\arctan(|x|^3) = \frac{\pi}{2} \iff |x|^3 = 1 \iff x = \pm 1.$$

In particolare, i punti $x = \pm 1$ sono punti di minimo assoluto.

Simmetrie. Evidentemente f è pari, quindi basta limitare al studio al sottodominio $[0, +\infty[$.

Limiti e asintoti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - \sin\pi = 0, \text{ per simmetria } \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

per cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

ii)

Derivabilità.

Essendo f composizione di funzioni derivabili in $D\setminus\{0\}$, risulta

$$f'(x) = -\cos\big(2\arctan|x|^3\big)\,\frac{6x^2 \operatorname{sgn} x}{1+x^6}, \ \forall x \ne 0.$$

Per $x = 0$ chiaramente f è continua e siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

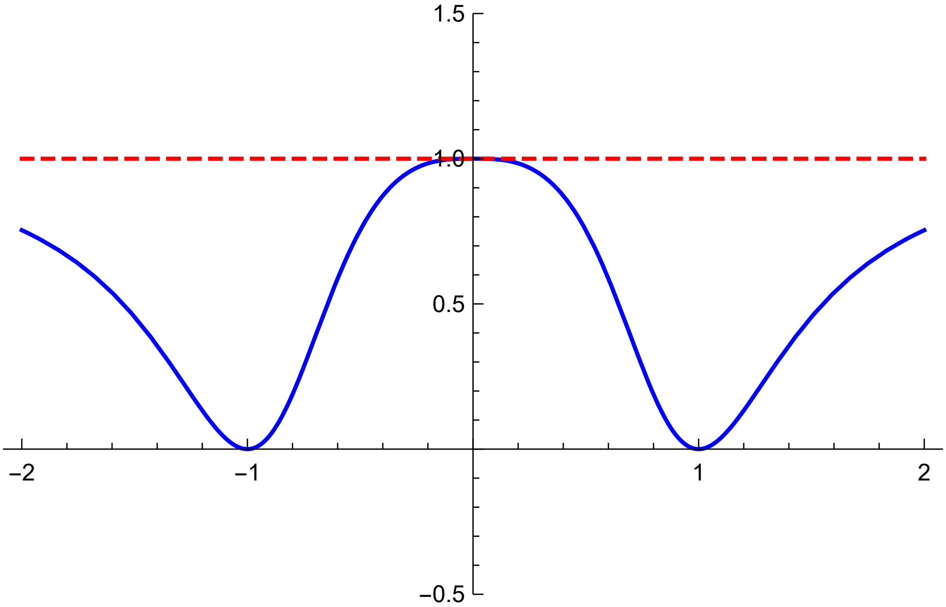
per il test di derivabilità si evince che f è derivabile per $x = 0$ e

$$f'(0) = 0.$$

Monotonia. Studiamo il segno di f': per $x > 0$,

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \iff \quad \cos\left(2\arctan x^3\right) \leqslant 0, \quad \iff \quad 2\arctan x^3 \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad \iff \quad \arctan x^3 \geqslant \frac{\pi}{4}, \quad \iff \quad x^3 \geqslant 1,$$

cioè per $x \geqslant 1$. Dunque f è decrescente su $[0,1]$ e crescente su $[1,+\infty[$. Si deduce facilmente la monotonia su D e che $x = 0$ è punto di massimo globale mentre, come già osservato, $x = \pm 1$ sono minimi globali.



Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \sinh x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log \dots\}$".

Svolgimento. Osserviamo che per $x \to 0^+$ vale

$$\begin{aligned} \left(1 - \sinh x\right)^{x^a} &= e^{x^a \log(1-\sinh x)} = e^{x^a \log(1-x+o(x))} \\ &= e^{x^a(-x+o(x))} = e^{-x^{a+1}+o(x^{a+1})} \end{aligned}$$

Ne deduciamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \sinh x\right)^{x^a} = \begin{cases} \lim_{y\to 0} e^y = 1 & \text{se } a+1 > 0 \iff -1 < a, \\ \lim_{y\to -1} e^y = 1/e & \text{se } a+1 = 0 \iff a = -1, \\ \lim_{y\to -\infty} e^y = 0 & \text{se } a+1 < 0 \iff a < -1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2 - z + 1)(z^3 + 4) = 0.$$

Svolgimento. Per il teorema fondamentale dell' algebra, le radici, contate con la propria molteplicità sono cinque. Chiaramente

$$(z^3 + 3)(z^2 - z + 1) = 0, \quad \iff \quad z^3 = -4, \ \vee \ (z^2 - z + 1) = 0.$$

Nel primo caso, si tratta di calcolare le tre radici terze, z_1, z_2, z_3 ,di -4. Premesso che $-3 = 3e^{i\pi}$, per la formula di De Moivre, $z = \rho e^{i\theta}$ è t.c.

$$z^3 = -4, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 4, \\ \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, \\ k = 0, 1, 2, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \; z_2 = -\sqrt[3]{4}, \; z_3 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nel secondo caso, con la formula risolvente per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} - 3e^t}{(e^t - 1)^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$.

Svolgimento. i) Operando la sostituzione $u = e^t$ ($\implies t = \log u \implies \dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{u}$) otteniamo

$$\int \tfrac{e^{2t}-3e^t}{e^t-1}\, dt = \int \tfrac{u^2-3u}{(u-1)}\tfrac{du}{u} = \int \tfrac{u-3}{u-1}\, du = \int \left(1 - \tfrac{2}{u-1}\right)\, du = u - 2\log|u-1| + c = e^t - 2\log|e^t - 1| + c.$$

ii) Considerato che $f_\alpha \in C(]0,1])$, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$ è generalizzato in 0. Essendo $f_\alpha \le 0$ su $]0,1]$, possiamo applicare il test del confronto asintotico a $-f_\alpha$ per stabilire la convergenza dell'integrale. Notiamo che

$$-f_\alpha(t) \sim \frac{1}{(e^t - 1)^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha} \qquad \text{per} \quad t \to 0^+,$$

per cui esiste $\int_0^1 f_\alpha$ se e solo se esiste $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$, se e solo se $\alpha < 1$, come ben noto.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\cos x)^n n}{n^2 + 1}$$

al variare di $x \in [0, \pi]$.

Svolgimento. Studiamo la condizione necessaria: per $a_n := \frac{(4\cos x)^n n}{n^2+1}$, si ha $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$. Osserviamo che vale

$$\lim |a_n| = \lim \frac{(4|\cos x|^n)n}{n^2 + 1} = \lim (4|\cos x|)^n \frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2 + 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4|\cos x| > 1, \\ 0 & \text{se } 4|\cos| \le 1. \end{cases}$$

Quindi per $4|\cos x| > 1$, cioè $x \in [0, \arccos(1/4)) \cup (\arccos(-1/4), \pi]$, la serie non può convergere né semplicemente né assolutamente.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{(4|\cos x|)^n n}{n^2 + 1}.$$

A tal fine, applichiamo il test del rapporto: poiché

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{(4|\cos x|)^{n+1}(n+1)(n^2+1)}{n(\{n+1\}^2+1)(4|\cos x|)^n} = 4|\cos x|),\ \forall x \in [0, \pi],$$

abbiamo che, se $|\cos x| < \frac{1}{4}$, cioè $x \in]\arccos(1/4), \arccos(-1/4)[$, la serie converge assolutamente (quindi anche semplicemente).

Rimangono i casi $x = \pm \arccos(1/4)$. Per $x = \arccos(1/4)$, la serie diventa

$$\sum_n \frac{n}{n^2+1} \sim \sum_n \frac{1}{n},\ \text{divergente.}$$

Essendo a termini di segno costante, convergenza semplice e assoluta coincidono (quindi non c'è alcun tipo di convergenza). Infine, per $x = \arcsin(-1/4)$,

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

che è una serie a termini di segno alternato. La convergenza assoluta ritorna al caso precedente (quindi è esclusa). Per la convergenza semplice possiamo applicare il criterio di Leibniz. La convergenza a 0 è evidente. Per la monotonia basta osservare

$$\frac{(n+1)}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2+1}$$

Dunque la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) .

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Svolgimento 1. Dall'ipotesi segue che $(n+1)a_{n+1} \geqslant na_n$, cioé (na_n) è crescente: allora $na_n \geqslant a_1 > 0$, da cui $a_n \geqslant \frac{a_1}{n}$ per ogni $n \geqslant 1$. Ma allora, la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Equivalentemente:

Svolgimento 2. Basta osservare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} \geq \ldots \geq \frac{n!}{n+1!} a_1 = a_1 \frac{1}{n+1}.$$

Dunque la serie maggiora la serie armonica, e dunque è convergente.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2020

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(2\arctan(|x|^5)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D =]-\infty, +\infty[$. Evidentemente f è pari, quindi basta limitarsi allo studio su $[0, +\infty[$. Poiché $2\arctan|x|^5 \in [0, \pi[$, f è sempre positiva ed inoltre $f = 0$ sse $x = 0$. Limiti: c'è un solo limite interessante, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sin\pi = 0$, da cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.

ii) Essendo f composizione di funzioni derivabili, eccetto per $x = 0$, risulta

$$f'(x) = \cos\left(2\arctan|x|^5\right)\frac{10x^4 \operatorname{sgn} x}{1+x^{10}}, \ \forall x \neq 0.$$

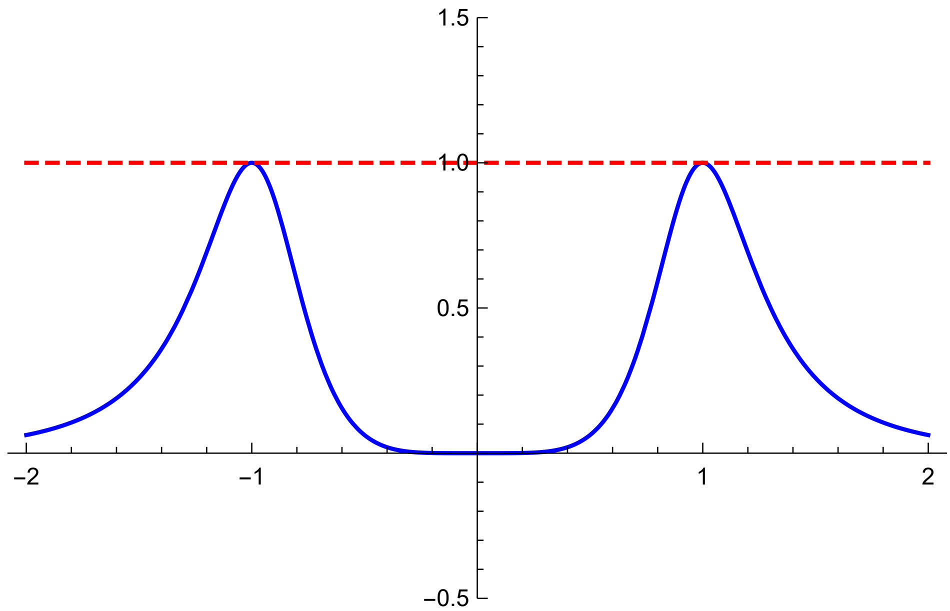
Per $x = 0$ chiaramente f è continua e siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

per il test di derivabilità si evince che $\exists f'(0) = 0$. Per la monotonia, studiamo il segno di f': per $x > 0$,

$$f'(x) \geqslant 0, \iff \cos\left(2\arctan x^5\right) \geqslant 0, \iff 2\arctan x^5 \leqslant \frac{\pi}{2}, \iff \arctan x^5 \leqslant \frac{\pi}{4}, \iff x^5 \leqslant 1,$$

cioè per $x \leqslant 1$. Dunque f è crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, +\infty[$. Si deduce facilmente la monotonia su D e che $x = 0$ è punto di minimo globale mentre $x = \pm1$ sono massimi globali.



Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1-\sin x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log \dots\}$".

Svolgimento. Osserviamo che per $x \to 0^+$ vale

$$\begin{aligned}\big(1-\sin x\big)^{x^a} &= \exp\{x^a \log(1-\sin x)\} = \exp\{x^a \log(1-x+o(x))\}\\ &= \exp\{x^a(-x+o(x))\} = \exp\left\{-x^{a+1}+o(x^{a+1})\right\}\end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1-\sin x\big)^{x^a} = \begin{cases} e^0 = 1, & \text{se } -1 < a, \\ e^{-1} = 1/e, & \text{se } a = -1, \\ 0, & \text{se } a < -1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+3)(z^2+z+2) = 0.$$

Svolgimento. Chiaramente

$$(z^3+3)(z^2+z+2) = 0, \quad \iff \quad z^3 = -3, \ \vee \ z^2+z+2 = 0.$$

Nel primo caso, si tratta di calcolare le radici terze di -3. Premesso che $-3 = 3e^{i\pi}$, per la formula di De Moivre, $z = \rho e^{i\theta}$ è t.c.

$$z^3 = -3, \quad \iff \quad \begin{cases} \rho^3 = 3, \\ \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, \ k = 0,1,2, \end{cases} \quad \iff \quad z = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ -\sqrt[3]{3}, \ \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nel secondo caso,

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} - 2e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$.

Svolgimento. i) Operando la sostituzione $u = e^t$ ("$du = e^t dt$") otteniamo

$$\int \tfrac{e^{2t}-2e^t}{e^t-1}\ dt = \int \tfrac{u^2-2u}{(u-1)}\tfrac{du}{u} = \int \tfrac{u-2}{u-1}\ du = \int \left(1 - \tfrac{1}{u-1}\right)\ du = u - \log|u-1| = e^t - \log|e^t-1| + c.$$

ii) Considerato che $f_\alpha \in C(]0,1])$, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\ dt$ è generalizzato in 0. Essendo $f_\alpha \le 0$ su $]0,1]$, possiamo applicare il test del confronto asintotico per stabilire la convergenza dell'integrale. Notiamo che

$$f_\alpha(t) \sim -\frac{1}{(e^t-1)^\alpha} \sim -\frac{1}{t^\alpha} \qquad \text{per} \quad x \to 0^+,$$

per cui esiste $\int_0^1 f_\alpha$ sse esiste $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$, sse $\alpha < 1$ come ben noto.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\sin x)^n n}{n^2 + 2\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. Studiamo la condizione necessaria: per $a_n := \frac{(4\sin x)^n n}{n^2+2\sqrt{n}}$, si ha $\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$. Osserviamo che vale

$$\lim |a_n| = \lim (4|\sin x|)^n \frac{n}{n^2 + 2\sqrt{n}} = \lim (4|\sin x|)^n \frac{1}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4|\sin x| > 1, \\ 0 & \text{se } 4|\sin x| \leq 1. \end{cases}$$

Quindi per $4|\sin x| > 1$, cioè $x \in [-\pi/2, -\arcsin(1/4)) \cup (\arcsin(1/4), \pi/2]$, la serie non può convergere né semplicemente né assolutamente.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{n 4^n |\sin x|^n}{n^2 + 2\sqrt{n}}.$$

A tal fine, applichiamo il test della radice: poichè

$$\lim |a_n|^{1/n} = \lim \frac{n^{1/n} 4|\sin x|}{n^{2/n} + 2^{1/n} n^{1/(2n)}} = 4|\sin x|, \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

(ricordiamo che $n^{1/n} \longrightarrow 1$), abbiamo che, se $|\sin x| < 1$, cioè $x \in (-\arcsin(1/4), \arcsin(1/4))$, la serie converge assolutamente (quindi anche semplicemente).

Rimangono i casi $\sin x = \pm\frac{1}{4}$, cioè $x = \pm \arcsin(1/4)$. Per $x = \arcsin(1/4)$, la serie diventa

$$\sum_n \frac{n}{n^2 + 2\sqrt{n}} \sim \sum_n \frac{1}{n}, \text{ divergente.}$$

Essendo a termini di segno costante, convergenza semplice e assoluta coincidono (quindi non c'è alcun tipo di convergenza). Infine, per $x = -\arcsin(1/4)$,

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}},$$

che è una serie a termini di segno alternato. La convergenza assoluta ritorna al caso precedente (quindi è esclusa). Per la convergenza semplice possiamo applicare il test di Leibniz purché

$$\frac{n}{n^2 + 2\sqrt{n}} \searrow 0.$$

La convergenza a 0 è evidente. Per la monotonia basta osservare

$$\frac{n}{n^2 + 2\sqrt{n}} = \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

dove la funzione al denominatore è crescente. La serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per il test di Leibniz.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Svolgimento. Dall'ipotesi segue che $(n+1)a_{n+1} \geqslant na_n$, cioé (na_n) è crescente: allora $na_n \geqslant a_1 > 0$, da cui $a_n \geqslant \frac{a_1}{n}$ per ogni $n \geqslant 1$. Ma allora, la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2020

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin\left(2\arctan(|x|^5)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento

i) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ poiché lo sono le funzioni modulo, arcotangente e seno. Dunque $D = \mathbb{R}$.

La funzione è pari, infatti

$$f(-x) = 1 - \sin(2\arctan(|-x|^5)) = 1 - \sin(2\arctan(|x|^5)) = f(x),$$

dunque il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'asse $x = 0$ (asse delle ordinate).

Vediamo i limiti agli estremi del dominio, cioè a $\pm\infty$. Essendo f pari si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \sin(2\arctan(|x|^5)) = 1 - \sin(\pi) = 1,$$

dunque la funzione ammette asintoti orizzontali a $\pm\infty$ di equazione $y = 1$.

Per quanto riguarda il segno, notiamo che $0 \le 2\arctan(|x|^5) < \pi$ e dunque $0 \le \sin(2\arctan(|x|^5)) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $0 \le 1 - \sin(2\arctan(|x|^5)) \le 1$ (questo lo si poteva anche dedurre immediatamente dal fatto che il seno assume sempre valori in $[-1, 1]$ e quindi $0 \le 1 - \sin(...) \le 1$). Inoltre $1 - \sin(2\arctan(|x|^5)) = 0$ se e solo se $\sin(2\arctan(|x|^5)) = 1$, cioè $2\arctan(|x|^5) = \frac{\pi}{2}$. L'equazione $\arctan(|x|^5) = \frac{\pi}{4}$ è soddisfatta per $|x|^5 = 1$, cioè per $x = \pm 1$. La funzione è dunque sempre strettamente positiva su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e si annulla per $x = -1$ e per $x = 1$.

ii) La funzione $C^0(\mathbb{R})$ poiché composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$. Inoltre è sicuramente $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ poich composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (in particolare compare $|x|$ che è $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$). La derivabilità in $x = 0$ non è comunque esclusa a priori e va verificata. Calcoliamo prima la derivata su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{10\cos(2\arctan(x^5))x^4}{1+x^{10}}, & x \in (0, +\infty), \\ \frac{10\cos(2\arctan(-x^5))x^4}{1+x^{10}}, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

Vediamo immediatamente che $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$ e dunque $f'_+(0) = 0$ (esiste la derivata destra in $x = 0$ e vale 0), e $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0$ e dunque $f'_-(0) = 0$ (esiste la derivata sinistra in $x = 0$ e vale

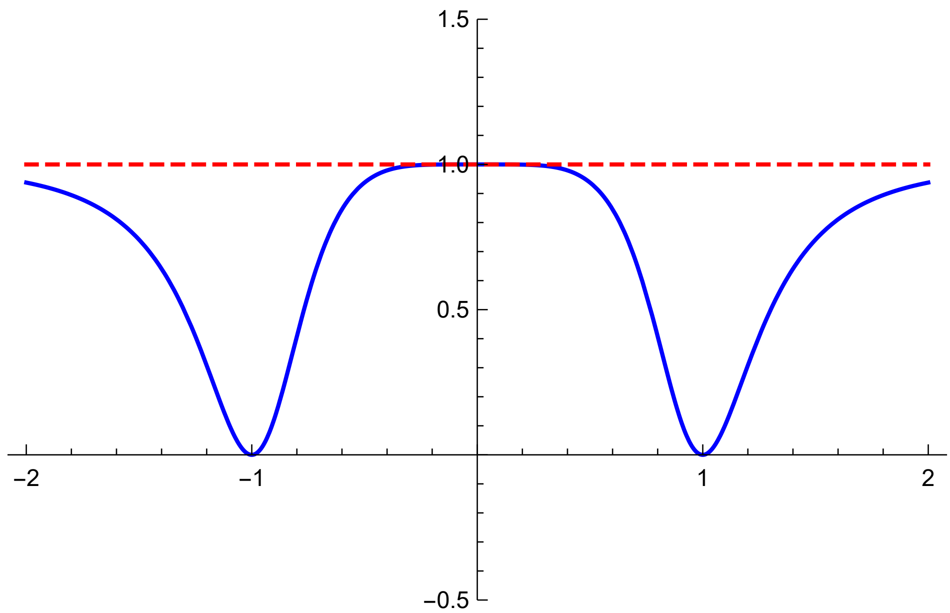
0). Inoltre f è continua in $x = 0$, per cui f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 0$ ed $f'(x)$ è continua in $x = 0$. Concludiamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Studiamo il segno della derivata su $(0, +\infty)$ e quindi la monotonia di f su $[0, +\infty)$. Per parità dedurremo il comportamento di f anche su $(-\infty, 0]$. Notiamo che per $x \in (0, +\infty)$, $0 < 2\arctan(x^5) < \pi$. In particolare $\cos(2\arctan(x^5)) > 0$ se $0 < 2\arctan(x^5) < \frac{\pi}{2}$, cioè se $0 < \arctan(x^5) < \frac{\pi}{4}$, ovvero $0 < x < 1$. Siccome su $(0, +\infty)$

$$f'(x) = -\frac{10\cos(2\arctan(x^5))x^4}{1 + x^{10}},$$

concludiamo che $f'(x) > 0$ su $(1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ su $(0, 1)$ e $f'(x) = 0$ per $x = 1$. Quindi f è strettamente crescente su $[1, +\infty)$ e strettamente descrescente su $[0, 1]$. Per parità di f (o studiando f' su $(-\infty, 0)$) deduciamo che $f'(x) < 0$ su $(-\infty, 1)$, $f'(x) > 0$ su $(-1, 0)$ ed $f'(x) = 0$ per $x = -1$. Dunque f è strettamente decrescente su $(-\infty, -1]$ e strettamente crescente su $[-1, 0]$. Inoltre si ha pure $f'(0) = 0$. Dunque ci sono tre punti stazionari per f: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. In particolare $x = \pm 1$ sono punti di minimo relativo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto. Questi sono anche punti di massimo e minimo assoluti: infatti $f(1) = f(-1) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, mentre $f(0) = 1 - \sin(0) = 1$, e per come è definita f si ha che $0 \le f(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iii) Il grafico di f è il seguente



Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \sinh x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log ...}".

Svolgimento. Scriviamo

$$(1 + \sinh(x))^{x^a} = e^{x^a \log(1+\sinh(x))}.$$

Siccome $\sinh(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, possiamo scrivere

$$\log(1 + \sinh(x)) = \log(1 + x + o(x)) = x + o(x)$$

per $x \to 0$, dove abbiamo anche usato lo sviluppo $\log(1 + y) = y + o(y)$ per $y \to 0$, e le regole sull'algebra degli o piccoli. Calcoliamo allora

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(1 + \sinh(x)) = \lim_{x\to 0^+} x^{a+1} + o(x^{a+1}) = \lim_{x\to 0^+} x^{a+1} \left(1 + \frac{o(x^{a+1})}{x^{a+1}}\right) = \begin{cases} 0\,, & a > -1, \\ 1\,, & a = -1, \\ +\infty\,, & a < -1. \end{cases}$$

Dunque in tutti e tre i casi il limite esiste, e quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1 + \sinh x\big)^{x^a} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^a \log(1+\sinh(x))} = e^{\lim_{x\to 0^+} x^a \log(1+\sinh(x))} = \begin{cases} 1\,, & a > -1, \\ e\,, & a = -1, \\ +\infty\,, & a < -1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2 - z + 2)(z^3 + 2) = 0.$$

Svolgimento. Il polinomio di grado 5 ammette esattamente 5 radici in $\mathbb{C}$ contate con la propria molteplicità. Il polinomio è già fattorizzato, dunque è sufficiente cercare i tre zeri complessi di $z^3 + 2 = 0$ e i due zeri complessi di $z^2 - z + 2 = 0$.

I tre zeri di $z^3 + 2 = 0$ sono le tre radici cubiche di -2. Se scriviamo $z = |z|e^{i\theta}$, dobbiamo risolvere

$$|z|^3 e^{3i\theta} = -2 = 2e^{i\pi},$$

ovvero $|z|^3 = 2$, cioè $|z| = \sqrt[3]{2}$, e

$$3\theta = \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\,, k \in \mathbb{Z}.$$

È sufficiente considerare $k = 0, 1, 2$, e dunque $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ (per $k = 0$), $\theta_1 = \pi$ (per $k = 1$), $\theta_2 = \frac{5\pi}{3}$ (per $k = 2$). I tre zeri di $z^3 + 2 = 0$ sono dunque

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \\ z_1 &= \sqrt[3]{2} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right). \end{aligned}$$

Risolviamo ora $z^2 - z + 2 = 0$. Dalla formula risolutiva abbiamo

$$z_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} + 3e^t}{(e^t - 1)^\alpha}\,.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Svolgimento.

i) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{2t}+3e^t}{e^t-1}dt,$$

ovvero l'insieme di tutte le primitive. Con il cambio di variabile $y = e^t$ abbiamo

$$\int \frac{e^{2t}+3e^t}{e^t-1}dt = \int \frac{e^t+3}{e^t-1}\cdot e^t dt = \int \frac{y+3}{y-1}dy_{|_{y=e^t}}.$$

Osserviamo che

$$\frac{y+3}{y-1} = \frac{y-1+4}{y-1} = 1 + \frac{4}{y-1}.$$

Dunque

$$\int \frac{e^{2t}+3e^t}{e^t-1}dt = \int 1 + \frac{4}{y-1}dy_{|_{y=e^t}} = y + 4\log(|y-1|) + C_{|_{y=e^t}} = e^t + 4\log(|e^t-1|) + C.$$

ii) Notiamo che $f_\alpha(t) > 0$ su $(0,1]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto di integrazione impropria è (evenualmente, a seconda di α) $t = 0$. Inoltre

$$f_\alpha(t) = \frac{e^{2t}+3e^t}{(e^t-1)^\alpha} \sim \frac{4}{t^\alpha}$$

per $t \to 0^+$, infatti abbiamo usato il fatto che $e^t = 1+t+o(t)$ per $t \to 0$ (o, se si preferisce, $e^t \sim 1+t$ per $t \to 0$). Per il criterio del confronto asintotico possiamo dire che $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ ha lo stesso carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{4}{t^\alpha}dt.$$

Quest'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha < 1$, e diverge a $+\infty$ altrimenti.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\cos x)^n n}{n^2+2}$$

al variare di $x \in [0,\pi]$.

Svolgimento. Notiamo innanzitutto che se $|3\cos(x)| > 1$, allora il termine n-esimo della serie non è infinitesimo (per la gerarchia degli infiniti: il termine n-esimo è dato da un'esponenziale di base in modulo strettamente maggiore di 1 moltiplicato per delle potenze), per cui la serie non converge sicuramente (la condizione necessaria è violata). Esplicitiamo la condizione $|3\cos(x)| > 1$ su $[0,\pi]$:

$$|3\cos(x)| > 1 \iff \cos(x) > \frac{1}{3} \text{ oppure } \cos(x) < -\frac{1}{3} \iff x \in \left[0, \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cup \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \pi\right].$$

Per tali valori di x la serie non soddisfa la condizione necessaria per cui non converge. In particolare diverge a $+\infty$ se $x \in \left[0, \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, poiché è a termini positivi.

Consideriamo ora $x \in \left[\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$. In questo caso $|3\cos(x)| \le 1$ ed il termine n-esimo della serie è infinitesimo. Studiamo prima la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|3\cos x|^n n}{n^2+2}.$$

Utilizziamo il criterio della radice e calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|3\cos x|^n n}{n^2+2}} = |3\cos(x)|.$$

Se $|3\cos(x)| < 1$, la serie converge assolutamente e quindi semplicemente. Se $|3\cos(x)| = 1$ il criterio della radice non dà informazioni. Studiamo la convergenza assoluta per $|3\cos(x)| = 1$, ovvero la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+2}.$$

Notiamo che la serie è a termini positivi e che

$$\frac{n}{n^2+2} \sim \frac{1}{n}$$

per $n \to +\infty$. Dunque la serie ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e quindi diverge a $+\infty$. Dunque non abbiamo convergenza assoluta per $|3\cos(x)| = 1$, ma divergenza assoluta a $+\infty$.

Resta da verificare la convergenza semplice della serie per $|3\cos(x)| = 1$, cioè la convergenza della serie per $3\cos(x) = \pm 1$, ovvero per $x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ o $x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Nel caso $x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, cioè $3\cos(x) = 1$, la serie di partenza diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+2},$$

che diverge a $+\infty$ (già visto). Per $x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, cioè per $3\cos(x) = -1$, la serie di partenza diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2},$$

ovvero una serie a termini di segno alterno. Verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz. La successione $a_n = \frac{n}{n^2+2}$ è sicuramente positiva e infinitesima. Proviamo che è decrescente, ovvero proviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+2} \le \frac{n}{n^2+2} \iff (n+1)(n^2+2) \le n((n+1)^2+2)$$
$$\iff n^3+n^2+2n+2 \le n^3+2n^2+3n \iff n^2+n-2 \ge 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$. Dunque per Leibniz abbiamo convergenza della serie per $x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

In conclusione abbiamo

- Convergenza assoluta per $x \in \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.
- Convergenza semplice per $x \in \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.
- Divergenza assoluta per $x \in \left[0, \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right] \cup \left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \pi\right]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Svolgimento. Utilizzando ricorsivamente l'informazione $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$, che può essere riscritta come $a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} a_n$, notiamo che

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} a_{n-1} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{n+1} a_1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque $a_n \geq \frac{a_1}{n}$. Per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

La serie, che è a termini positivi, diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto, essendo minorata dalla serie armonica (a meno di una costante moltiplicativa strettamente positivia), che diverge a $+\infty$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.