ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x+1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Soluzione: i) Chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 1} e^t = e, \quad \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty.$$

Perciò, f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = e$ per $x \to \pm\infty$, e un asintoto verticale di equazione $x = -1$ per $x \to -1$.

ii) f è composta da funzioni derivabili tranne dove il modulo si annulla, cioè f è sicuramente derivabile in ogni $x \in D \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Il punto $x = 0$ viene studiato a parte. Distinguiamo tra il caso in cui $\frac{x}{x+1} > 0$, cioè $x > 0$ oppure $x < -1$, e il caso in cui $\frac{x}{x+1} < 0$, cioè $-1 < x < 0$.

- se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\},$$

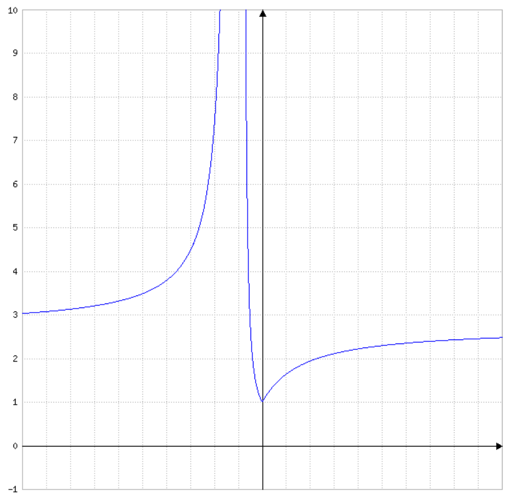
  che è strettamente positiva, perciò f è crescente su $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Se $x \in]-1, 0[$ si ha

$$f(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\},$$

  che è strettamente negativa, perciò f è decrescente su $]-1, 0[$.



Si vede che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1e^0 = 1$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1e^0 = -1$. Perciò f non è derivabile in $x = 0$, che è un punto angoloso. Essendo D un'unione di intervalli aperti, f può avere estremi locali solo dove la derivata si annulla e in punti di non derivabilità. Come osservato sopra, $f'(x) \neq 0$, e l'unico estremo si trova in $x = 0$, dove f ha il suo minimo assoluto con $f(0) = 1$.

iii) Grafico:

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{k!}{k^k}.$$

Soluzione: La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto asintotico. Si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{3^k k!} = \frac{3(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{3}{e} \text{ per } k \to \infty.$$

Essendo $\frac{3}{e} > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto asintotico.

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Soluzione

Essendo $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{5\pi}{4}i}$, l'equazione da risolvere diventa

$$z^3 = \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{4}i}} = e^{-\frac{5\pi}{4}i} = e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Per il teorema di De Moivre le soluzioni sono

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})i} = e^{\frac{11\pi}{12}i} = e^{-\frac{\pi}{12}i}, \quad z_2 = e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})i} = e^{\frac{19\pi}{12}i} = e^{-\frac{5\pi}{12}i}$$

Applicando le formule di bisezione, si ha

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

da cui anche

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

cosicché

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Soluzione: i) Con la sostituzione $y = -2/t$ si ha $t = -2/y$, $dt = \frac{2}{y^2}dy$, e quindi

$$\int f_3(t)dt = \int \frac{e^{-2/t}}{3t^3} = \int \frac{e^y}{3}\frac{-y^3}{8}\frac{2}{y^2}dy = -\frac{1}{12}\int ye^y dy.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int f_3(t)dt = -\frac{1}{12}\int ye^y dy = -\frac{1}{12}\left(ye^y - \int e^y dy\right) = \frac{1}{12}(1-y)e^y = \frac{1}{12}\left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-2/t}.$$

ii) f_α è continua su $(0,\infty)$. Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha (per la gerarchia degli infiniti) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha} = 0$. Quindi, la funzione f_α può essere prolungata per continuità in $t = 0$, per cui è sempre integrabile in $[0, c]$, per qualsiasi $c > 0$. Per $t \to +\infty$, da $\frac{2}{t} \to 0$ si ottiene $e^{-2/t} \sim 1$ per cui

$$f_\alpha(t) \sim \frac{1}{3t^\alpha},$$

ed essendo f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico, l'integrale esiste se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x-x^3) - \log(1+\sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata $0/0$. Analizziamo il numeratore. Ricordando che (per $t \to 0$)

$$\sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si vede che (per $x \to 0^+$)

$$\text{Numeratore} = (x - x^3) - \tfrac{(x-x^3)^3}{6} + o((x-x^3)^3)$$

$$- \left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)\right) + \alpha x^2$$

$$= \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 + \left(-1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3) = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 - \tfrac{5}{3}x^3 + o(x^3) \sim \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 - \tfrac{5}{3}x^3.$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Numeratore}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} - \frac{5}{3} \right) = \begin{cases} \infty, & \alpha > -\frac{1}{2}, \\ -\infty, & \alpha < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{3}, & \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt, \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Soluzione: La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0, +\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1} e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1, +\infty[, \quad \iff \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0, \ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \iff \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x\geqslant 0}{\iff} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α è concava su $[1, +\infty[$ se e solo se $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, per ogni $\alpha > 0$ si ha $F''_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, per cui F_α non può essere concava su $[0, +\infty[$ per alcun valore di $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, si ha che

$$F''_0(x) = -2xe^{-x^2} < 0 \quad \forall x > 0,$$

dunque F_0 è concava su $[0, +\infty[$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2020

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x+1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Soluzione: i) Chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 1} e^t = e, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty.$$

Perciò, f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = e$ per $x \to \pm\infty$, e un asintoto verticale di equazione $x = 0$ per $x \to 0$.

ii) f è composta da funzioni derivabili tranne dove il modulo si annulla, cioè f è sicuramente derivabile in ogni $x \in D \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Il punto $x = -1$ viene studiato a parte. Distinguiamo tra il caso in cui $\frac{x+1}{x} > 0$, cioè $x > 0$ oppure $x < -1$, e il caso in cui $\frac{x+1}{x} < 0$, cioè $-1 < x < 0$.

- se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = \exp\left\{\frac{x+1}{x}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{x+1}{x}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\exp\left\{\frac{x+1}{x}\right\},$$

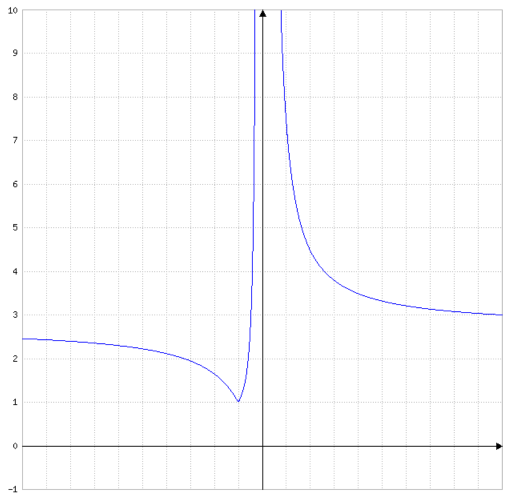
che è strettamente negativa, perciò f è decrescente su $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Se $x \in]-1, 0[$ si ha

$$f(x) = \exp\left\{-\frac{x+1}{x}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{-\frac{x+1}{x}\right\} \frac{d}{dx}\left(-\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\exp\left\{-\frac{x+1}{x}\right\},$$

che è strettamente positiva, perciò f è crescente su $]-1, 0[$.



Si vede che $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 1e^0 = 1$, mentre $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -1e^0 = -1$. Perciò f non è derivabile in $x = -1$, che è un punto angoloso. Essendo D un'unione di intervalli aperti, f può avere estremi locali solo dove la derivata si annulla e in punti di non derivabilità. Come osservato sopra, $f'(x) \neq 0$, e l'unico estremo si trova in $x = -1$, dove f ha il suo minimo assoluto con $f(-1) = 1$.

iii) Grafico:

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \frac{k!}{k^k}.$$

Soluzione: La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto asintotico. Si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{4^k k!} = \frac{4(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{4}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{4}{e} \text{ per } k \to \infty.$$

Essendo $\frac{4}{e} > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto asintotico.

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Soluzione

Essendo $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{-\frac{1\pi}{4}i}$, l'equazione da risolvere diventa

$$z^3 = \frac{1}{e^{-\frac{1\pi}{4}i}} = e^{\frac{1\pi}{4}i}.$$

Per il teorema di De Moivre le soluzioni sono

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{12}i}, \quad z_1 = e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})i} = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})i} = e^{\frac{17\pi}{12}i} = e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

Applicando le formule di bisezione, si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

da cui anche

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

cosicché

$$z_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}\,i \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}\,i.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{2e^{-3/t}}{t^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Soluzione: i) Con la sostituzione $y = -3/t$ si ha $t = -3/y$, $dt = \frac{3}{y^2}dy$, e quindi

$$\int f_3(t)dt = \int \frac{2e^{-2/t}}{t^3} = \int 2e^y \frac{-y^3}{27}\frac{3}{y^2}dy = -\frac{2}{9}\int ye^y dy.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int f_3(t)dt = -\frac{2}{9}\int ye^y dy = -\frac{2}{9}\left(ye^y - \int e^y dy\right) = \frac{2}{9}(1-y)e^y = \frac{2}{9}\left(1+\frac{3}{t}\right)e^{-3/t}.$$

ii) f_α è continua su $(0,\infty)$. Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha (per la gerarchia degli infiniti) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{-2/t}}{t^\alpha} = 0$. Quindi, la funzione f_α può essere prolungata per continuità in $t = 0$, per cui è sempre integrabile in $[0,c]$, per qualsiasi $c > 0$. Per $t \to +\infty$, da $\frac{3}{t} \to 0$ si ottiene $e^{-2/t} \sim 1$ per cui

$$f_\alpha(t) \sim \frac{2}{t^\alpha},$$

ed essendo f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x-x^3) - \log(1+\sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata $0/0$. Analizziamo il numeratore. Ricordando che (per $t \to 0$)

$$\sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si vede che (per $x \to 0^+$)

$$\text{Numeratore} = (x - x^3) + \tfrac{(x-x^3)^3}{6} + o((x-x^3)^3)$$

$$- \left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)\right) + \alpha x^2$$

$$= \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 + \left(-1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3) = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 - x^3 + o(x^3) \sim \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 - x^3.$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{Numeratore}}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} - 1 \right) = \begin{cases} \infty, & \alpha > -\frac{1}{2}, \\ -\infty, & \alpha < -\frac{1}{2}, \\ -1, & \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2} \, dt, \; x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Soluzione: La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0, +\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1} e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1, +\infty[, \quad \iff \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0, \; \forall x \in [1, +\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \iff \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x \geqslant 0}{\iff} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α è concava su $[1, +\infty[$ se e solo se $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, per ogni $\alpha > 0$ si ha $F''_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, peer cui F_α non può essere concava su $[0, +\infty[$ per alcun valore di $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, si ha che

$$F''_0(x) = -2xe^{-x^2} < 0 \quad \forall x > 0,$$

dunque F_0 è concava su $[0, +\infty[$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2020

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x-1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x - 1 \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Limiti: dobbiamo calcolarli per $x \longrightarrow \pm\infty$, $x \longrightarrow 1$ (ev. $1\pm$). Osservato che, per $x \longrightarrow \pm\infty$, $\frac{x}{x-1} \longrightarrow 1$ si ha subito che $f(x) \longrightarrow e$, dunque $y = e$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$. Per $x \longrightarrow 1\pm$, $\frac{x}{x-1} \longrightarrow \pm\infty$, quindi il modulo tente comunque a $+\infty$, da cui $f(x) \longrightarrow \infty$. La retta $x = 1$ è asintoto verticale per f. Si può inoltre osservare che $f > 0$ su D e, anzi, essendo $|\cdot| \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 1$ per ogni $x \in D$. Da questo si può anche già concludere che $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f e che non ci sono massimi assoluti (essendo f illimitata).

ii) Essendo composizione di funzioni continue ove definite, f è continua sul proprio dominio. Per la derivabilità lo stesso vale eccetto per x t.c. $\frac{x}{x-1} = 0$, cioè $x = 0$. Dunque, sicuramente f è derivabile su $D\backslash\{0\}$ e vale

$$f'(x) = e^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}\text{sgn}\left(\frac{x}{x-1}\right)\frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} = -e^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}\text{sgn}\left(\frac{x}{x-1}\right)\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Facilmente

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -e^0(-1)\cdot 1 = +1, \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -e^0(+1)\cdot 1 = -1,$$

da cui, per il test di derivabilità, esistono $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, ma non esiste $f'(0)$. Il punto $x = 0$ è angoloso. Studiamo il segno di f': chiaramente

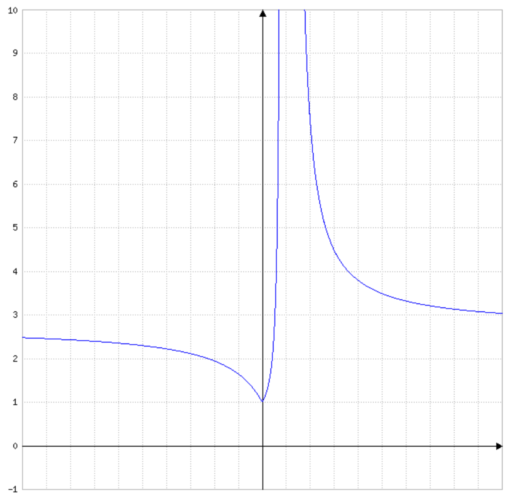
$$f'(x) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{x-1} \leqslant 0, \quad \overset{x\in D}{\Longleftrightarrow} \quad 0 \leqslant x < 1.$$

Ne segue che f è decrescente su $]-\infty, 0]$ e su $]1, +\infty[$ mentre è crescente su $[0, 1[$. La discussione per min/max è già stata fatta al punto i).

iii) Grafico:

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^k \frac{k!}{k^k}.$$



Svolgimento. La serie è, evidentemente, a termini di segno costante. Vista la forma del termine generale può convenire applicare il criterio del rapporto. Detto a_k il termine generale,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 5^{k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!}\frac{1}{5^k} = 5\frac{k^k}{(k+1)^k} = 5\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{5}{e} > 1,$$

dunque la serie diverge.

Esercizio 3 [5 punti] Esprimere in forma algebrica ed esponenziale le soluzioni in $\mathbb{C}$ di:

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Svolgimento. Anzitutto osserviamo che

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i = 1u\left(\frac{3}{4}\pi\right),$$

da cui

$$\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{1}{1u\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = 1u\left(-\frac{3}{4}\pi\right).$$

Si tratta quindi di determinare le radici terze di questo numero. Per il teorema di De Moivre queste sono

$$z_k = 1u\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{3e^{-2/x}}{x^\alpha}.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Abbiamo

$$\int \frac{3e^{-2/x}}{x^3}\,dx \overset{y=-2/x,\ x=-2/y,\ dx=2/y^2}{=} \int 3e^y \frac{y^3}{-8}\frac{2}{y^2}\,dy = -\frac{3}{4}\int ye^y\,dy = -\frac{3}{4}\left(ye^y - e^y\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{x}e^{-2/x} - e^{-2/x}\right) = \frac{3}{4}e^{-2/x}\frac{x+2}{x}.$$

ii) Chiaramente $f_\alpha \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$. Se $\alpha \leqslant 0$ la continuità si estende anche a $x=0$. In ogni caso, essendo

$$\lim_{x\to 0+} f_\alpha(x) \overset{y=2/x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{3}{2^\alpha}\frac{y^\alpha}{e^y} = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (e^y \gg_{+\infty} y^\alpha),$$

in particolare, f_α è prolungabile con continuità in $x=0$ anche per $\alpha > 0$, per cui è sempre integrabile in $x=0$. Morale, occorre verificare l'integrabilità a $+\infty$. Per $x \longrightarrow +\infty$, essendo $\frac{2}{x} \longrightarrow 0$, si ha $e^{-2/x} \sim_{+\infty} 1$ per cui

$$f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{3}{x^\alpha},$$

ed essendo palesemente f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico

$$\exists \int^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx \iff \exists \int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \iff \alpha > 1.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x+x^3) - \log(1+\sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata $0/0$. Poiché il comportamento del denominatore è già semplice, studiamo quello del numeratore. Ricordato che

$$\sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3),\quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\quad \sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si vede che

$$\begin{aligned} N &= (x+x^3) - \tfrac{(x+x^3)^3}{6} + o((x+x^3)^3) - \left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right)\right) \\ &\quad + \alpha x^2 \\ &= \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 1_x, \end{aligned}$$

per $\alpha + \frac{1}{2} \neq 0$. In questo caso

$$\lim_{x\to 0+} \frac{N(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\infty.$$

Per $\alpha + \frac{1}{2} = 0$ occorre comunque aggiungere un termine allo sviluppo del logaritmo (altrimenti il termine resto, che è $o(x^2)$, cancella i termini rimanenti e non permette di calcolare il limite. Si tratta di aggiungere alla parentesi centrale il termine

$$+\frac{t^3}{3} = +\frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3$$

ed il relativo $o-$piccolo, che è $o(x^3)$. Svolgendo i calcoli si trova

$$N = x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \frac{x^3}{3}1_x,$$

da cui, facilmente, il limite della frazione è $= \frac{1}{3}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt,\ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha \geqslant 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Svolgimento. La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0, +\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1}e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1, +\infty[, \quad \Longleftrightarrow \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0,\ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α può essere concava su $[1, +\infty[$ sse $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, essendo $F''_\alpha > 0$ su $[0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, F_α non può essere concava su $[0, +\infty[$ per alcun valore di α.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2020

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x-1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Soluzione: i) Chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 1} e^t = e, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty.$$

Perciò, f ha un asintoto orizzontale $y = e$ per $x \to \pm\infty$, e un asintoto verticale in $x = 0$.

ii) f è composta da funzioni derivabili tranne dove il modulo si annulla, cioè f è sicuramente derivabile su $D \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Il punto $x = 1$ viene studiate a parte. Distinguiamo tra il caso $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} > 0$, cioè $x > 1$ oppure $x < 0$, e il caso $0 < x < 1$. Nel primo caso $f(x) = \exp\left\{\frac{x-1}{x}\right\}$ e la derivata

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{x-1}{x}\right\} \frac{d}{dx}(1 - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} \exp\left\{\frac{x-1}{x}\right\},$$

che è strettamente positiva, perciò f è crescente su $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Per $0 < x < 1$ si ha

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{1-x}{x}\right\} \frac{d}{dx}(\frac{1}{x} - 1) = \frac{-1}{x^2} \exp\left\{\frac{1-x}{x}\right\},$$

che è strettamente negativa, perciò f è decrescente su $(0, 1)$. Si vede che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1e^0 = 1$, mentre $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1e^0 = -1$. Perciò f non è derivabile in $x = 1$, che è un punto angoloso. Essendo D la unione di intervalli aperti, f può avere estremi locali solo dove la derivata si annulla e in punti di non differenziabilità. Come osservato sopra, $f'(x) \neq 0$, e l'unico estremo si trova in $x = 1$, dove f ha il suo minimo assoluto con $f(1) = 1$.

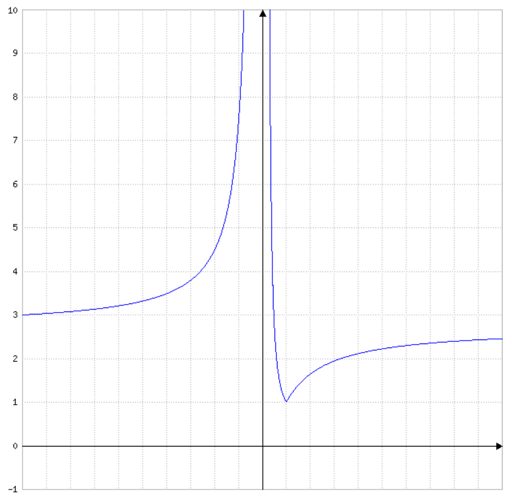
iii) Grafico:

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6^k \frac{k!}{k^k}.$$

Soluzione: La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto asintotico. Si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{6^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{6^k k!} = \frac{6(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{6}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{6}{e} \text{ per } k \to \infty.$$



Essendo $\frac{6}{e} > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto asintotico.

Esercizio 3 [5 punti] Esprimere in forma algebrica ed esponenziale le soluzioni in $\mathbb{C}$ di:

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i}.$$

Soluzione: Essendo $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = e^{\frac{\pi}{4} i}$, e ricordato che $1/e^{\theta i} = e^{-\theta i}$, l'equazione da risolvere diventa

$$z^3 = e^{-\frac{\pi}{4} i}.$$

Per il teorema di De Moivre le soluzioni sono

$$z_0 = e^{-\frac{\pi}{12} i}, \quad z_1 = e^{(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}) i} = e^{\frac{7\pi}{12} i}, \quad z_2 = e^{(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}) i} = e^{\frac{5\pi}{4} i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-3/t}}{2t^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Soluzione: i) Con la sostituzione $y = -3/t$ si ha $t = -3/y$, $dt = \frac{3}{y^2} dy$, e quindi

$$\int f_3(t) dt = \int \frac{e^{-3/t}}{2t^3} = \int \frac{e^y}{2} \frac{-y^3}{27} \frac{3}{y^2} dy = -\frac{1}{18} \int y e^y dy.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$-\frac{1}{18} \left(y e^y - \int e^y dy \right) = \frac{1}{18}(1 - y) e^y = \frac{1}{18}(1 + \frac{3}{t}) e^{-3/t}.$$

ii) f_α è chiaramente continua su $(0,\infty)$. Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha (per la gerarchia degli infiniti) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-3/t}}{2t^\alpha} = 0$. Quindi, la funzione f_α può essere prolungata per continuità in $x = 0$, per cui è sempre integrabile in $x = 0$. Per $x \to \infty$, essendo $\frac{2}{x} \to 0$, si ha $e^{-2/x} \sim 1$ per cui

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha},$$

ed essendo f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico, l'integrale esiste se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x + x^3) - \log(1 + \sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata $0/0$. Poiché il comportamento del denominatore è già semplice, studiamo quello del numeratore. Ricordato che (per $t \to 0$)

$$\sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si vede che (per $x \to 0^+$)

$$\begin{aligned} N(x) &= (x + x^3) + \tfrac{(x+x^3)^3}{6} + o((x + x^3)^3) \\ &\quad - \left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)\right) + \alpha x^2 \\ &= \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3) = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 + x^3 + o(x^3) \sim \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} + 1\right) = \begin{cases} \infty, & \alpha > -\frac{1}{2}, \\ -\infty, & \alpha < -\frac{1}{2}, \\ 1, & \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt, \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha \geqslant 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Soluzione: La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0, +\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1} e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1, +\infty[, \quad \Longleftrightarrow \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0, \ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \iff \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x \geqslant 0}{\iff} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α è concava su $[1, +\infty[$ se e solo se $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, essendo $F''_\alpha > 0$ su $[0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, F_α non può essere concava su $[0, +\infty[$ per alcun valore di $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, si ha che la funzione $F'_0(x) = f_0(x) = e^{-x^2}$ è decrescente su $[0, \infty)$, e segue che F_0 è concava su tale intervallo.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.