ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 06.07.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Soluzione

$$\lim_{x\to -3^+} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to -3^+} -(x+3)\log(x+3) = \lim_{x\to -3^+} -\frac{\log(x+3)}{\frac{1}{x+3}} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=}$$
$$= \lim_{x\to -3^+} x+3 = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to +\infty} (x+3) \lim_{x\to +\infty} \log(x+3) = +\infty$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Soluzione Per ogni x tale che $f(x) \neq 0$, cioè, per ogni $x \in D\backslash\{-2\}$,

$$f'(x) = \text{sgn}\Big((x+3)\log(x+3)\Big)(\log(x+3)+1)$$

$$\begin{gathered} f'(x) \geq 0 \iff \\ x \in \Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) > 0,\ \log(x+3)+1 \geq 0\Big\} \bigcup \\ \bigcup \Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) < 0,\ \log(x+3)+1 \leq 0\Big\} \\ \iff \\ x \in \Big\{x > -2 \quad x \geq -3 + \tfrac{1}{e}\Big\} \bigcup \\ \bigcup \Big\{-3 < x < -2,\ x \leq -3 + \tfrac{1}{e}\Big\} = \\ \Big]-3, -3+\tfrac{1}{e}\Big[\ \bigcup\ ]-2, +\infty[\end{gathered}$$

Perciò f è monotona crescente in ognuno degli $\big]-3, -3+\frac{1}{e}\big[$ e $]-2, +\infty[$, mentre è monotona decrescente in $-3+\frac{1}{e}, -2[$. Pertanto la funzione ha un massimo locale nel punto $x = -3+\frac{1}{e}$, dove vale $f\left(-3+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, e un minimo locale nel punto $x = -2$, dove vale $f(-2) = 0$. Dal teorema del limite destro e sinistro delle dertivate si ottiene

$$f'_+(-2) = \lim_{x\to -2+} f'(x) = 1 \qquad f'_-(-2) = \lim_{x\to -2-} f'(x) = -1.$$

Dunque $x = -2$ è un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -x-2$ e tangente destra di equazione $y = x+2$.

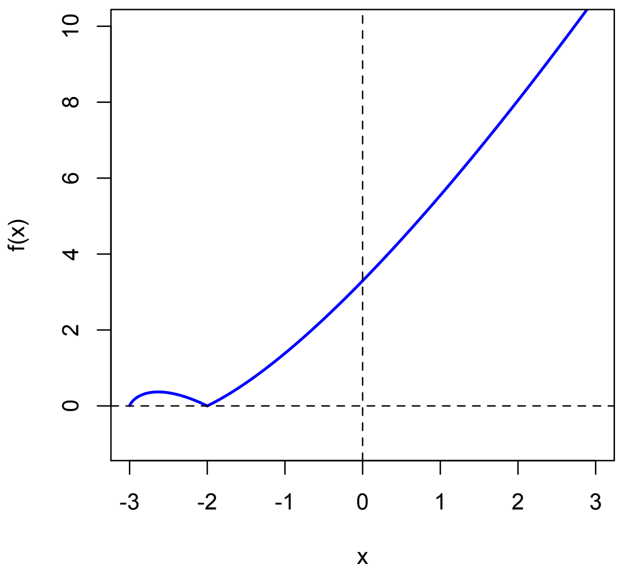

Figure 1: Grafico di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Soluzione cominciamo con l' esprimere $8i$ in forma trigonometrica:

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Perciò $8i$ ha modulo $\rho = 8$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{2}$. Risolvere l' equazione significa trovare le radici terze di $8i$, che noi sappiamo essere in numero di tre. Diciamole z_0, z_1, z_2. Si ha

$$z_0 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Come sapevamo già dalla teoria, le soluzioni rappresentate sul piano di Gauss costituiscono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio 2. Più precisamente, uno dei tre vertici si trova in $(0, -2)$ e un lato è orizzontale, sottoinsieme della retta $y = 1$.

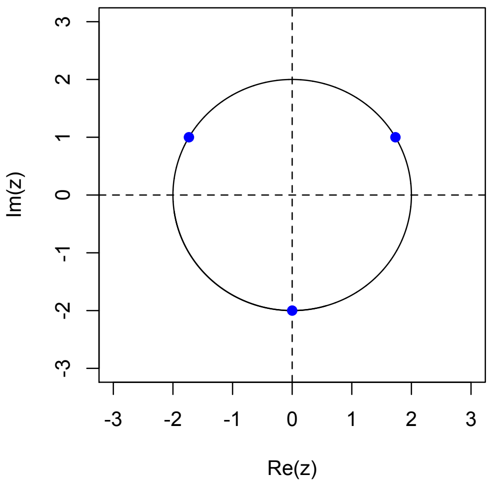

Figure 2: Le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Solutione.

Si tratta di una serie a termini positivi. *Proviamo* ad applicare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+(n+1)^2)\log(n+1)}{(n+1)^4}}{\frac{(1+n^2)\log n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} \frac{(2+n^2+2n)}{(1+n^2)} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n(1+1/n)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1$$

Purtroppo siamo nel *caso in cui il criterio del rapporto non dà alcuna informazione.*

Tentiamo allora la strada del *confronto* (asintotico).

Il fattore $\frac{(1+n^2)}{n^4}$ è asintotico a $\frac{1}{n^2}$, che fornirebbe una serie convergente. Tuttavia c'è il fattore $\log n$, che peggiora la situazione. Però noi sappiamo che, per $x \to \infty$ $\log x = o(x^\alpha)$ per qualsiasi $\alpha > 0$: infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x} x^{-\alpha+1}) = \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0.$$

Pertanto, scegliendo ad esempio $\alpha = 1/2$, si ha che

$$\frac{(1+n^2)\log n}{n^4} = o\frac{(1+n^2)n^{\frac{1}{2}}}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, per il criterio del rapporto asintotico si conclude che anche la serie data è convergente.

Osservazione. Si sarebbe potuto scegliere un qualsiasi $\alpha \in]0,1[$ al posto di $\alpha = \frac{1}{2}$. Invece gli $\alpha \geq 1$ sarebbero stati inservibili, in quanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ è divergente per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Soluzione.

Per ogni $r > 0$, calcoliamo l' integrale $\displaystyle\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx$. Con la sostituzione $y(x) = \sqrt{2x}$, cioè $x(y) = \dfrac{y^2}{2}$ si ottiene

$$\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \int_0^{\sqrt{2r}} e^{-y} \frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dy}\, dy = \int_0^{\sqrt{2r}} e^{-y} y dy = (\textit{per parti})$$

$$= [-e^{-y}y]_0^{\sqrt{2r}} + \int_0^{\sqrt{2r}} e^{-y} dy = -\sqrt{2r}e^{-\sqrt{2r}} - e^{-\sqrt{2r}} + 1.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \left(-\sqrt{2r}e^{-\sqrt{2r}} - e^{-\sqrt{2r}} + 1\right) = 1$$

(perché

$$\lim_{r\to+\infty} \sqrt{2r}e^{-\sqrt{2r}} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\sqrt{2r}}{e^{\sqrt{2r}}} = 0.)$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2.$$

Usando lo sviluppo di Taylor

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y) \qquad y \to 0$$

(valido per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$), si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{2}{3x}\right)^2 \overset{\text{(P.S.I.)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.