ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 14.09.2020

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x \in (1, +\infty).$$

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Soluzione:

(i) la funzione è definita e continua in tutto il dominio $(1, +\infty)$, pertanto gli eventuali asintoti riguardano solo $x \to 1+$ e $x \to +\infty$. Da

$$\lim_{x\to 1+} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

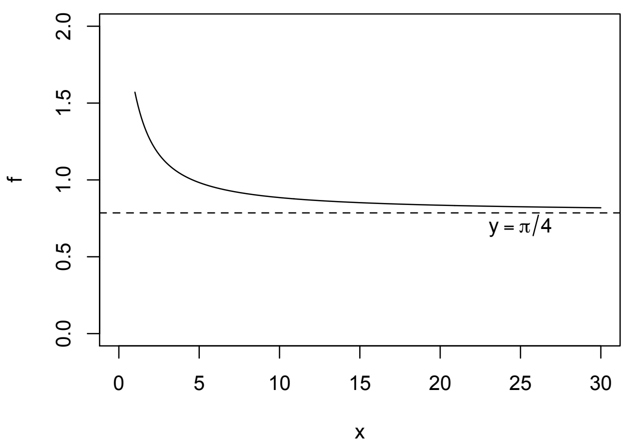
$$\lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan y = \frac{\pi}{4}$$

si ottiene che la funzione ha un asintoto orizzontale per $y \to +\infty$ di equazione $y = \frac{\pi}{4}$.

(ii) Calcoliamo la derivata di f:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2 + (x+1)^2}.$$

Perciò $\frac{df}{dx}(x) < 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$, da cui segue che la funzione è strettamente decrescente nel dominio $(1, +\infty)$.



Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Soluzione:
(i) Si ha $\rho := |z| = \sqrt{3+1} = 2$, da cui

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(ii)

$$Re(z^6) = Re(2^6 e^{-i\pi}) = -64 \quad (= z^6)$$

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Soluzione: (i) In virtù del criterio di Leibniz la serie converge semplicemente:

- ha segni alterni;
- $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente infatti,

$$\frac{n_1}{n_1^2+1} \geq \frac{n_2}{n_2^2+1} \iff n_2(n_1^2+1) \leq n_1(n_2^2+1) \iff (n_2-n_1)(1-n_2 n_1) \leq 0 \iff n_2 \geq n_1,$$

(l'ultimo passaggio dovuto al fatto che $(1 - n_2 n_1) \leq 0$); oppure si calcola la derivata

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \leq 0 \iff |x| \geq 1 \quad \text{se} \quad x \geq 1$$

- si ha $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0.$

(ii) La serie non converge assolutamente, perchè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

è asintotica alla serie armonica.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x) - \sin x}{x^2}.$$

Soluzione: da

$$\log(1+\sinh x) - \sin x = \sinh x - \frac{(\sinh x)^2}{2} + o((\sinh x)^2) - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{(x)^2}{2} + o(x^2)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x) - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{(x)^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Oppure si applica De l'Hôpital due volte.

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^\infty \log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right)\, dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0,\infty)$ esso converge.

Soluzione:

(i)

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k \log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) dx = \lim_{k\to+\infty}\left(\left[x\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\right]_1^k - \int_1^k \frac{2}{(1+x^2)}\, dx\right) =$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$= \log 2 - \pi + \frac{\pi}{2} = \log 2 - \frac{\pi}{2}$$

(ii)

$$\log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{x^\alpha+1}\right) = -\frac{1}{x^\alpha+1} + o\left(\frac{1}{x^\alpha+1}\right)$$

Per confronto asintotico con $-\dfrac{1}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.