

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 09.09.2024

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

[*Suggerimento:* si può sfruttare il fatto che $-\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{x}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$.]

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z - i|z|^2 = 5 - 4\bar{z}$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica e rappresentarle nel piano di Gauss.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\cosh n)}{(n^4 + 2n - 1)^\alpha}$$

[*Suggerimento:* si ricorda che $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\log = \log_e$.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = (\arcsin x)^\alpha (1 - x^2)^{\alpha-2}$$

- (a) Calcolare $\int_0^1 f_2(x) dx$.

[*Suggerimento:* Usare la sostituzione $\arcsin(x) = t$.]

- (b) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.