

PROGRAMMA del corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria biomedica, Canale 2

docente: Claudio Marchi

a.a. 2024-2025

Testi Consigliati:

“Analisi Matematica 1, teoria e applicazioni”, A. Marson, P. Baiti, F. Ancona & B. Rubino, Carocci Editore.

“Analisi Matematica 1”, M. Bramanti, C.D. Pagani & S. Salsa, Zanichelli Editore.

“Analisi Matematica 1”, A. Languasco, Hoepli Editore.

“Analisi Matematica 1”, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, Mc Graw Hill Editore.

Dispensa a cura dei docenti, contenente i temi d’esame svolti ed altri esercizi.

Complementi in rete sulle pagine web dei docenti; in particolare i file pdf delle singole lezioni sulla piattaforma `stem.elearning.unipd.it`.

Legenda: con il simbolo “(D)” si intende che la dimostrazione dell’enunciato è da considerarsi di base mentre con il simbolo “(d)” si intende che la dimostrazione dell’enunciato è ritenuta più difficile. Le restanti dimostrazioni non sono richieste.

1 Elementi introduttivi

1.1 Logica elementare, sommatorie, principio di induzione

- Quantificatori. Negazione di proposizioni con quantificatori.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Principio di induzione (d). Formula della progressione geometrica (D). Formula della progressione telescopica (d).
- Fattoriale. Coefficienti binomiali e loro proprietà. Formula del binomio di Newton.

1.2 Elementi di teoria degli insiemi, insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Prodotto cartesiano di insiemi. Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato. $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (d).
- I numeri reali come allineamenti decimali. L’insieme $\mathbb{R}$. Teorema di completezza. Simboli “ $+\infty$ ” e “ $-\infty$ ”. Retta reale estesa $\mathbb{R}^*$.
- Definizione di modulo o valore assoluto; disuguaglianza triangolare (d).
- Insiemi limitati, superiormente o inferiormente limitati. Definizione di: maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore. Unicità del massimo e del minimo (D). Caratterizzazione dell’estremo superiore/inferiore.
- Radicali ed esponenti a potenza reale. Logaritmi e loro proprietà.

2 Funzioni

- Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari. Immagine e controimmagine di insiemi tramite una funzione. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa. Funzione invertibile su un insieme. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche. Funzioni monotone.

- Funzioni iperboliche e loro proprietà; funzioni iperboliche inverse e loro formula esplicita (solo per $\sinh$: d). Funzioni trigonometriche e loro inverse. Funzione “parte intera”, funzione “mantissa”, funzione di Dirichlet.
- Funzioni limitate ed illimitate. Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione. Punti di estremo di una funzione. Estremi ed estremanti.

3 Limiti di funzioni

- Intorni di un punto di $\mathbb{R}^*$. Intersezione di intorni è un intorno (D). Proprietà di separazione (D). Definizione di punto di accumulazione di un insieme. Punto isolato di un insieme. Proprietà verificate definitivamente.
- Definizione di limite di una funzione nelle sue varie formulazioni. Esempi di limiti calcolati usando la definizione (D). Teorema di unicità del limite (D). Limite finito implica locale limitatezza (D).
- Punto di accumulazione destro e sinistro di un insieme. Definizione di limite destro e di limite sinistro di una funzione. Relazione tra limite ed i limiti destro e sinistro.
- Relazione tra limite di una funzione e limite del suo modulo (d). Teorema della permanenza del segno (D) e suo corollario (D). Teorema dei carabinieri (D). Limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ (d). Teorema sull'algebra dei limiti (D). Forme indeterminate. Teorema sull'algebra estesa dei limiti. Teorema del confronto (D). Teorema del cambio di variabile. Teorema sul limite di funzioni monotone. Limiti delle principali funzioni elementari. Limiti notevoli derivanti da $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ (d).
- Definizione del numero di Nepero “ e ”; limiti notevoli conseguenti (d).
- Asintoticità di due funzioni: simbolo “ $\sim$ ”. Il simbolo “ o -piccolo” e la sua algebra. Relazione tra asintoticità ed o -piccolo (d). Cambio di variabile negli sviluppi. Teorema di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti. Gerarchia degli infiniti. Il simbolo “ O -grande”. Ordine di infinito e di infinitesimo. Ordine di infinito e di infinitesimo rispetto ad una famiglia di funzioni-campione.

4 Successioni

- Successioni. Proprietà verificate definitivamente da una successione. Definizione di limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti, infinitesime, indeterminate, monotone. Una successione è definitivamente limitata se e solo se è limitata (D). Una successione convergente è limitata (D).
- Teorema dell'unicità del limite, relazione tra limite e modulo, teorema sull'algebra dei limiti, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei carabinieri, caratterizzazione del limite per le successioni monotone.
- Gerarchia degli infiniti per le successioni.
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è una successione convergente.
- Sottosuccessioni. Una successione ha limite l se e solo se tutte le sue sottosuccessioni hanno limite l . Teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni. Teorema-ponte.

5 Serie

- Definizione di somme parziali. Definizione di serie convergente, divergente, regolare ed irregolare (indeterminata). Serie geometrica e suo carattere (D). Serie di Mengoli e suo carattere (D).

- Carattere della somma di serie convergenti e del prodotto di una serie regolare per una costante. Coda di una serie. Limite del termine generale di una serie convergente (cioè condizione necessaria per la convergenza di una serie) (D). Possibili caratteri di una serie con termini di segno definitivamente costante (D). Serie assolutamente convergenti. Convergenza assoluta implica convergenza semplice (D). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica (D). Carattere della serie armonica generalizzata (D). Carattere della serie di termine $a_k = [k^\alpha \log^\beta k]^{-1}$ (d). Criterio del confronto e corrispondente criterio asintotico. Criterio del rapporto (D) e corrispondente criterio asintotico (D). Criterio della radice (D) e corrispondente criterio asintotico. Relazione tra il limite nel criterio del rapporto asintotico e quello nel criterio della radice asintotico. Criterio di Leibniz.

6 Funzioni continue di una variabile reale

- Definizione di funzione continua. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni continue. Teorema della definitiva limitatezza, teorema della permanenza del segno e teorema del cambio di variabili, tutti per funzioni continue. Continuità della composizione di funzioni continue. Teorema-ponte per funzioni continue.
- Punti di discontinuità eliminabile, di discontinuità di prima e seconda specie. Prolungamento per continuità.
- Teorema di Weierstrass. Teorema di Bolzano o degli zeri (D). Teorema dei valori intermedi (D). Teorema: se f è continua su un intervallo, allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Teorema sulla continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari e delle principali funzioni inverse.

7 Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale

- Definizione di derivata prima di una funzione e di funzione derivabile. Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari (D). Interpretazione geometrica della derivata. Rapporto incrementale di una funzione in un punto. Migliore approssimazione lineare di una funzione. Retta tangente al grafico di una funzione. Continuità di una funzione derivabile (D). Classificazione dei punti di non derivabilità: punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi. Derivata destra e derivata sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra.
- Teorema sull'algebra delle derivate (derivata della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni derivabili) (D). Derivata della funzione composta (d). Una funzione pari ha derivata dispari e una dispari ha derivata pari. Derivata della funzione inversa di una funzione invertibile e derivabile (d). Calcolo delle derivate delle inverse delle principali funzioni elementari (d).
- Funzione derivata. Derivate successive. Funzioni di classe $C^{(n)}$.
- Teorema di Fermat (D). Teorema di Rolle (D). Teorema di Lagrange (D). Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (D). Teorema di Cauchy. Legame tra monotonia e derivata prima (D). Teorema di de l'Hôpital. (d, solo nel caso di $\frac{0}{0}$ in un punto di $\mathbb{R}$). Teorema sulla relazione tra derivata destra/sinistra e limite destro/sinistro della derivata (d).
- Funzioni convesse e concave. Monotonia della derivata prima di una funzione derivabile convessa o concava. Legame tra segno della derivata seconda e convessità/concavità. Punti di flesso. Legame tra zeri della derivata seconda e punti di flesso. Studio della natura dei punti critici con la derivata seconda.
- Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui di una funzione. Criterio per l'individuazione degli asintoti obliqui.
- Studi di funzione.
- Polinomi di Taylor e di McLaurin. Principali proprietà dei polinomi di Taylor. Teorema di Peano. Sviluppi delle principali funzioni elementari. Calcolo dei limiti mediante gli sviluppi.

8 Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale

- Partizioni di un intervallo. Norma di una partizione. Somma inferiore e superiore di Riemann. Relative proprietà.
- Definizione di funzione integrabile secondo Cauchy-Riemann su un intervallo e proprietà equivalenti. Integrale definito di una funzione e sua interpretazione geometrica. Esempi di funzioni integrabili (d). Non integrabilità della funzione di Dirichlet (d).
- Linearità dell'integrale. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Disuguaglianza sull'integrale del modulo di una funzione integrabile. Integrabilità delle funzioni monotone (d, su $[0, 1]$) e delle funzioni continue a tratti. Integrabilità delle principali funzioni elementari (d).
- Teorema della media integrale (**D**); relativa interpretazione geometrica.
- Primitiva di una funzione. Integrale indefinito di una funzione. Teorema fondamentale del calcolo integrale (**D**). Integrali immediati.
- Integrazione per sostituzione (**D**). Integrazione per parti (**D**).
- Integrazione di alcune funzioni razionali fratte (dimostrazione per denominatori di grado ≤ 2 : **D**; per il caso generale: d) o integrali ad esse riconducibili.
- Funzioni integrabili in senso improprio; integrali in senso improprio o generalizzato. Assoluta integrabilità. Assoluta integrabilità implica integrabilità. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Integrabilità di $1/[x^\alpha |\ln x|^\beta]$ su $(0, 1/2]$ e su $[2, +\infty)$ (d).

9 Equazioni differenziali ordinarie

- Equazioni differenziali ordinarie (EDO). EDO lineari, omogenee, autonome, in forma normale. Ordine di una EDO. Soluzione e integrale generale di una EDO. Problema ai valori iniziali (problema di Cauchy).
- EDO lineari del primo ordine omogenee; individuazione dell'integrale generale. EDO lineari del primo ordine non omogenee; l'integrale generale è dato da una soluzione particolare più l'integrale generale dell'omogenea associata. Calcolo della soluzione particolare. Problema di Cauchy.
- EDO a variabili separabili. Metodo per l'individuazione dell'integrale generale. Teorema di esistenza e unicità della soluzione. Contro-esempi. Problema di Cauchy.
- EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee. Calcolo dell'integrale generale. Problema di Cauchy.
- EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee; l'integrale generale è dato da una soluzione particolare più l'integrale generale dell'omogenea associata. Metodi per individuare una soluzione particolare: metodo per somiglianza, metodo per variazione delle costanti, metodo per sovrapposizione.