ANALISI III (Corso di Laurea in Matematica, Facoltà di Scienze mm.ff.nn., Università degli Studi di Padova, a.a. 1994/95), FASCICOLO 1: esercizi su argomenti dei capitoli 1,2,3 di H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori, Napoli, 1986 e complementi di topologia (v. G.B. Folland, Real Analysis, J. Wiley, New York, 1984, Cap.4, §3,4). Gli esercizi contrassegnati con $\star$ presentano parti impegnative; gli esercizi contrassegnati con $\star\star$ sono molto impegnativi.

Esercizio 1.1

Sia $X = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$; calcolare la norma del funzionale definito da:

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \ , \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \ , \quad x_i \in [a,b] \ , \quad x_i \neq x_j \text{ per } i \neq j \ .$$

Esercizio 1.2

Sia $X = (C^0([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$; calcolare la norma del funzionale definito da:

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - 2f(0) \ .$$

Esercizio 1.3

Sia $X = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$; calcolare la norma dell'operatore (lineare e continuo) $T : X \to X$ definito da:

$$(Tf)(x) = \int_a^b f(x)dx + g(x)f(x) \ ,$$

dove $g \in C^0([a,b])$.

Esercizio 1.4

Si dice che due spazi normati X e Y sono isomorfi se esiste un morfismo biiettivo $\mu : X \to Y$, tale che μ e μ^{-1} sono entrambi continui (isomorfismo di spazi normati); si dice che X e Y sono linearmente isometrici se esiste un morfismo isometrico e suriettivo $\mu : X \to Y$ (isomorfismo isometrico). Siano X e Y due spazi normati isomorfi; dimostrare le seguenti affermazioni:

$(4a)$ X è separabile $\Longleftrightarrow$ Y è separabile;

$(4b)$ X è completo $\Longleftrightarrow$ Y è completo;

$(4c)$ X^* e Y^* sono isomorfi (linearmente isometrici se tali sono X e Y).

Sugg.: per $(4c)$ considerare l'applicazione $\nu : X^* \to Y^*$, $\varphi \mapsto \psi_\varphi$, dove $\psi_\varphi(y) = \varphi(\mu^{-1}(y))$ $\forall\, y \in Y$.

Esercizio 1.5

Dimostrare le seguenti inclusioni (dal punto di vista algebrico):

(5a) $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$, dove $c_{00} = \{\{x_n\} : card\{n : x_n \neq 0\} < \infty\}$,
$c_0 = \{\{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, $c = \{\{x_n\} : \exists\,\text{finito} \lim_{n\to\infty} x_n\}$;

(5b) $c_{00} \subset \ell^p$, $1 \leq p < \infty$;

(5c) $\ell^p \subset c_0$, $1 \leq p < \infty$;

(5d) $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, $p_1 < p_2$, $1 \leq p_1 < \infty$.

Esercizio 1.6

Dimostrare che:

(6a) $\overline{c_0} = c_0$ in ℓ^∞;

(6b) $\overline{c_{00}} = c_0$ in ℓ^∞;

(6c) $\overline{c} = c$ in ℓ^∞;

(6d) $\overline{c_{00}} = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$.

Conseguenze: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ e $(c, \|\cdot\|_\infty)$ sono completi; $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ e $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, sono separabili ($c_{00} = \langle\{e^{(n)}\}\rangle$ dove $e^{(n)}_j = \delta_{nj}$).

Esercizio 1.7

Dimostrare che ℓ^∞ non è separabile.

Sugg.: si consideri il sottoinsieme delle successioni a valori in $\{0,1\}$, ovvero il sottoinsieme delle funzioni caratteristiche delle parti di $\mathbf{N}$, e si usi il fatto che un sottoinsieme di uno spazio metrico separabile è separabile (dimostrarlo).

Conseguenze: v. Es. 1.11,27.

Esercizio 1.8

Dimostrare che $(c, \|\cdot\|_\infty)$ è separabile.

Sugg.: provare che $c_1 = \{\{x_n\} : \exists\, L, \nu,\ x_n = L\, \forall n \geq \nu\}$ è denso in c e osservare che $c_1 = \langle\{e^{(n)}\}, \{\sigma^{(m)}\}\rangle$, dove $\sigma^{(m)}_j = 0$ per $j = 0, 1, ..., m-1$ e $\sigma^{(m)}_j = 1$ per $j \geq m$.

Esercizio 1.9*

Dimostrare che $(c_0)^* = \ell^1$ (nel senso che sono linearmente isometrici).

Sugg.: far vedere che l'applicazione di ℓ^1 in $(c_0)^*$, $y \mapsto \varphi_y$, dove $\varphi_y(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$, è un morfismo isometrico e suriettivo. Per la suriettività, dato $\varphi \in c_0^*$, definire $y_n = \varphi(e^{(n)})$ (deve essere cosí se $\varphi = \varphi_y$ per un qualche $y \in \ell^1$); mostrare che $y \in \ell^1$ e che φ coincide con φ_y su c_{00} (v. Es. 1.6).

Esercizio 1.10*

Dimostrare che $(\ell^p)^* = \ell^q$, $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ ($q = \infty$ per $p = 1$).

Sugg.: v. sugg. Es. 1.9, usare la disuguaglianza di Hölder e $1/p + 1/q = 1$.

Conseguenze: ℓ^p è riflessivo, $1 < p < \infty$ (non basta $(\ell^p)^{**} = \ell^p$, bisogna far vedere che l'immersione canonica è suriettiva (non richiesto)); $(\ell^2)^* = \ell^2$.

Esercizio 1.11

Dimostrare che $\ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$ (nel senso che è linearmente isometrico ad un sottospazio proprio e non può esserlo a tutto lo spazio).

Sugg.: il morfismo di ℓ^1 in $(\ell^\infty)^*$, $y \mapsto \varphi_y$ (v. Es. 1.9) è isometrico, ma non è suriettivo; in effetti non può esistere un isomorfismo tra i due spazi (v. Es. 1.6, ricordare che ℓ^∞ non è separabile e che X^* *separabile* $\Rightarrow X$ *separabile*).

Conseguenze: ℓ^1 non è riflessivo (v. Es. 1.10, uno spazio riflessivo è necessariamente isomorfo al biduale).

Esercizio 1.12

Dimostrare direttamente che il morfismo isometrico $\ell^1 \to (\ell^\infty)^*$ dell'Es. 1.11 non è suriettivo.

Sugg.: si consideri $\varphi \in c^*$, $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ e si usi il teorema di Hahn-Banach.

Commenti: allo stesso modo si vede che $y \mapsto \varphi_y$, $\ell^1 \to c^*$, non è suriettivo (anche se, come vedremo, $c^* = \ell^1$). Si noti però che φ è limite, nella topologia debole* di c^*, della successione di funzionali $\{\varphi_{y_m}\}$ con $y_m = e^{(m)}$.

Esercizio 1.13*

Dimostrare che $c^* = \ell^1$.

Sugg.: sappiamo già che il morfismo $y \mapsto \varphi_y$ (v. Es. 1.11,12) è isometrico ma non suriettivo; far vedere che l'applicazione di ℓ^1 in c^*, $y \mapsto \psi_y$, dove $\psi_y(x) = y_0 \lim_{n\to\infty} x_n + \sum_{n=0}^\infty y_{n+1} x_n$, è un morfismo isometrico e suriettivo. Per la suriettività, dato $\varphi \in c^*$, definire $y_0 = \varphi(\sigma^{(\mu)}) - \sum_{n=\mu}^\infty y_{n+1}$ per un μ fissato e $y_{n+1} = \varphi(e^{(n)})$ (deve essere cosí se $\varphi = \psi_y$ per un qualche $y \in \ell^1$); mostrare che $y \in \ell^1$ e che φ coincide con ψ_y su c_1 (v. Es. 1.8).

Conseguenze: abbiamo un'altra dimostrazione che c non è riflessivo, perchè non può essere isomorfo al biduale (v. Es. 1.10,27) e che ℓ^1 non è riflessivo (v. Es. 1.11,27).

Commenti: si può dimostrare che c_0 e c non sono isomorfi (la dimostrazione esula da quanto visto); quindi spazi non isomorfi possono avere duali isomorfi (v. Es. 1.9). Si osservi anche che detto μ il morfismo isometrico $y \mapsto \varphi_y$, $\mu(\ell^1)$ è un sottospazio proprio di c^*, che risulta linearmente isometrico a c^*: infatti è linearmente isometrico ad ℓ^1, che è linearmente isometrico a c^* tramite $y \mapsto \psi_y$ (le relazioni tra spazi normati "essere isomorfi" e "essere linearmente isometrici" sono relazioni di equivalenza).

Esercizio 1.14*

Sia $X = C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Si consideri il seguente funzionale su X:

$$\phi(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx,$$

dove w è una funzione sommabile su (a,b). Calcolare $\|\phi\|$ nei seguenti casi:

(14a) $w \geq 0$ *q.o.* in (a,b);

(14b)** $w \in C^0([a,b])$.

Sugg.: per mostrare che $\|\phi\| \geq \int_a^b |w(x)|dx$, in (14$b$) approssimare opportunamente w in $\|\cdot\|_\infty$ con un polinomio (teorema di densità di Weierstrass) e usare il fatto che un polinomio può avere al piú un numero finito di cambiamenti di segno in $[a,b]$.

Conseguenze: da (14b) segue che $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1) \subseteq X^*$ (il morfismo $w \mapsto \phi$ è isometrico); mostrare che non è suriettivo, controllando che i funzionali "calcolo in un punto", $\varphi(f) = f(\overline{x})$ per $\overline{x}$ fissato in $[a,b]$, non sono rappresentabili nella forma integrale indicata.

Esercizio 1.15

Siano X e Y spazi di Banach, $\{T_n\}$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$. Dimostrare che:

$$\{T_n x\} \text{ conv. } \forall x \in X \Longleftrightarrow \exists E, \overline{E} = E : \{T_n x\} \text{ conv. } \forall x \in E \text{ e } \exists K : \|T_n\| \leq K \; \forall n$$

Inoltre, detta T l'applicazione definita da $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, dimostrare che è lineare e continua e che vale $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Sugg.: per "$\Leftarrow$" dimostrare che $\{T_n x\}$ è di Cauchy $\forall x \in X$ usando il fatto che è di Cauchy sul denso E e $\|T_n\| \leq K \; \forall n$.

Commenti: "$\Rightarrow$" richiede la completezza di entrambi gli spazi; "$\Leftarrow$" è valida anche se X non è completo. Naturalmente se $\{T_n x\}$ converge a Zx su un denso, dove $Z \in \mathcal{L}(X,Y)$, allora $T = Z$. L'ultimo asserto dell'Es. è valido per una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$ limitata e puntualmente convergente con X, Y normati qualsiasi.

Esercizio 1.16*

Si dice *metodo di quadratura* oppure *metodo di integrazione approssimata* una successione di funzionali su $X = (C^0([a,b], \|\cdot\|_\infty)$, del tipo:

$$\varphi_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{in} f(x_{in}) \; , \quad \lambda_{in} \in \mathbf{R} \; , \quad x_{in} \in [a,b] \; , \quad x_{in} \neq x_{jn} \text{ per } i \neq j \; ,$$

dove i $\{\lambda_{in}\}$ si dicono pesi e gli $\{x_{in}\}$ si dicono nodi (il doppio indice sta ad indicare che i pesi e i nodi dipendono da n). Dimostrare che un metodo di quadratura converge a φ nella topologia debole*, dove $\varphi(f) = \int_a^b f(x)dx$, se e solo se converge a φ su $f = x^m$, $\forall\, m \in \mathbf{N}$ e $\exists K : \sum_{i=0}^n |\lambda_{in}| \leq K \; \forall n$. Dimostrare inoltre che un metodo di quadratura con pesi non negativi converge (debole*) a φ se e solo se vi converge su $f = x^m$, $\forall\, m \in \mathbf{N}$. Dimostrare infine che un metodo di quadratura tale che $\varphi_n(p) = \varphi(p)$ per ogni polinomio p di grado $\leq m_n$, dove $m_n \to \infty$, $n \to \infty$, converge (debole*) a φ se e solo se $\exists K : \sum_{i=0}^n |\lambda_{in}| \leq K \; \forall n$.

Sugg.: v. Es. 1.1 e Es. 1.15, usare il teorema di densità di Weierstrass. Per il secondo asserto usare il fatto che in particolare $\varphi_n(f)$ converge a $\varphi(f)$ per $f \equiv 1$.

Esercizio 1.17*
Sia $X = (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Si consideri la seguente famiglia di funzionali:

$$\varphi_\lambda(f) = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} \ , \quad \lambda \in (0,1) \ .$$

Dimostrare che $\{\varphi_\lambda\}$ non è debole* convergente (per $\lambda \to 0^+$), è debole* limitata ma non fortemente limitata.

Sugg.: controllare che la forma lineare "derivata destra in $x = 0$" non è continua; usare il teorema della media.

Conseguenze: X *non è completo* (si ricordi il teorema di Banach-Steinhaus); per convincersene direttamente si mostri che X *non è chiuso* in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (ad esempio si trovi una successione di funzioni in $C^1([0,1])$ che converge uniformemente ad una funzione non derivabile in qualche punto).

Esercizio 1.18*
Sia $X = (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{(1)})$, dove $\|f\|_{(1)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Dimostrare in questo caso la famiglia di funzionali dell'Es. 1.17 è debole* convergente, fortemente limitata ma non fortemente convergente.

Sugg.: la forma lineare "derivata destra in $x = 0$" è continua (calcolarne la norma); per vedere che la famiglia è fortemente limitata, oltre a calcolare direttamente $\|\varphi_\lambda\|_{X^*}$ si può usare il fatto che stavolta X è di Banach (dimostrarlo); per dimostrare che non c'è convergenza forte considerare la famiglia di funzioni $\{f_\lambda\}$, $f_\lambda(x) = \lambda \cos(x/\lambda)$ e usare la formula di Taylor.

Esercizio 1.19
Sia $X = (C^2([0,1]), \|\cdot\|_{(2)})$, dove $\|f\|_{(2)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty\}$. Dimostrare che si tratta di uno spazio di Banach e dimostrare che la famiglia di funzionali dell'Es. 1.17 in questo caso è fortemente convergente.

Esercizio 1.20
Sia $X = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$; dimostrare che:

$$f_n \xrightarrow{deb.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{punt.} f \ \text{ e } \ \exists K : \|f_n\| \le K \ \forall n$$

Commenti: anche il viceversa è vero, ma la dimostrazione richiede di conoscere la struttura dei funzionali di X^*.

Esercizio 1.21*
Dimostrare che:

$$x_m \xrightarrow{deb.} x \ \text{ in } \ (c_0, \|\cdot\|_\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad x_m \xrightarrow{punt.} x \ \text{ e } \ \exists K : \|x_m\| \le K \ \forall m$$

Sugg.: per "$\Leftarrow$" usare il fatto che $\varphi \in (c_0)^* \Rightarrow \varphi = \varphi_y$, $y \in \ell^1$ (v. Es. 1.9) e dimostrare che si può "passare al limite sotto il segno di serie" (fissato $\varepsilon > 0$, spezzare opportunamente la serie $\varphi_y(x_m - x) = \sum_{n=0}^\infty (x_m(n) - x_n) y_n = \sum_{n=0}^{\nu_\varepsilon} + \sum_{n=\nu_\varepsilon+1}^\infty$, dove

$\sum_{n=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} |y_n| < \varepsilon$, oppure usare il teorema della convergenza dominata rispetto alla misura che "conta i punti" su $\mathcal{P}(\mathbf{N})$).

Esercizio 1.22

Mostrare che in ℓ^∞ ci sono successioni debolmente convergenti che non convergono in $\|\cdot\|_\infty$.

Sugg.: la successione $\{e^{(m)}\}$ converge debolmente in c_0 (v. Es. 1.21); per ogni $\varphi \in (\ell^\infty)^*$, si consideri la restrizione a c_0.

Commenti: allo stesso modo si ha che in c_0 e in c la convergenza debole di una successione non implica la convergenza forte.

Esercizio 1.23**

Dimostrare che in ℓ^1 la convergenza debole di una successione implica la convergenza forte.

Traccia: supporre per assurdo che $\exists$ una successione convergente debolmente e non in norma; non è restrittivo dire che $\exists\ x_m \to 0$ deb., $\|x_m\|_1 \geq 1$. Diciamo che $x \in \ell^1$ è *concentrata a meno di* ε *in* $[\nu, \mu] \subseteq \mathbf{N}$ se $\sum_{n=\nu}^{\mu} |x_n| \geq \|x\|_1(1-\varepsilon)$. Usando *conv. debole* $\Rightarrow$ *conv. puntuale* in ℓ^1 (i funzionali "calcolo in un punto" hanno norma $= 1$) costruire una sottosuccessione $\{x_{m_k}\}$ tale che x_{m_k} è concentrata a meno di $1/4$ in $I_k = [\nu_k, \mu_k]$, dove $\nu_{k+1} = \mu_k + 1$ (quindi $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k = \mathbf{N}$). Considerare infine $\varphi_y \in (\ell^1)^*$ (v. Es. 1.10), con $y_n = sgn(x_{m_k}(n))$ per $n \in I_k$ e mostrare che $\varphi_y(x_{m_k})$ non tende a 0 per $k \to \infty$.

Conseguenze: ℓ^1 con la topologia debole *non può soddisfare il primo assioma di numerabilità*; cioè non è vero che ogni punto (o equivalentemente che $x = 0$) ammette una base numerabile di intorni. Altrimenti infatti l'identità da ℓ^1 con la topologia debole in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ risulterebbe continua, quindi gli aperti forti sarebbero aperti deboli e questo non è possibile in dimensione infinita.

Commenti: in realtà si può far vedere che nessuna topologia debole, in dimensione infinita, soddisfa il primo assioma di numerabilità (non richiesto).

Esercizio 1.24**

Dimostrare che:

$$x_m \xrightarrow{deb.} x \ \text{ in } \ (\ell^p, \|\cdot\|_p)\ ,\ 1 < p < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad x_m \xrightarrow{punt.} x \ \text{ e } \ \exists K : \|x_m\|_p \leq K\ \forall m$$

Sugg.: per "$\Leftarrow$" v. sugg. Es. 1.21 e usare la disuguaglianza di Hölder.

Conseguenze: in ℓ^p, $1 < p < \infty$, ci sono successioni debolmente convergenti e non convergenti in $\|\cdot\|_p$ (ad esempio $\{e^{(m)}\}$).

Esercizio 1.25*

Dimostrare che:

$$x_m \xrightarrow{deb.} x \ \text{ in } \ (c, \|\cdot\|_\infty) \Longleftrightarrow x_m \xrightarrow{punt.} x, \exists K : \|x_m\| \leq K\ \forall m,\ \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (x_m(n) - x_n) = 0$$

Sugg.: per "$\Leftarrow$" usare la rappresentazione dei funzionali di c^* fornita dall'Es. 1.13 (v. anche Es. 1.21).

Commenti: l'ipotesi del "doppio limite" non può essere eliminata; infatti $\sigma^{(m)} \xrightarrow{deb.} 0$, $\|\sigma^{(m)}\|_\infty \equiv 1$ ma $\varphi(\sigma^{(m)}) \equiv 1$, dove $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Esercizio 1.26

Siano X e Y spazi normati isomorfi (v. Es. 1.4); dimostrare che X è riflessivo $\Longleftrightarrow$ Y è riflessivo.

Sugg.: considerato un isomorfismo $\mu : X \to Y$, mostrare che $\mu(B_X[0,1]) = B_Y[0,1]$ e usare il teorema di Kakutani (μ, essendo lineare, è continua anche per X e Y muniti della topologia debole), oppure mostrare che se X è riflessivo da ogni successione limitata in Y si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente ($\Rightarrow$ *Y riflessivo* per il teorema di Eberlein-Smulian) ricorrendo a (1.4*c*).

Esercizio 1.27

Dimostrare che $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ non è riflessivo.

Sugg.: trovare in c_0 una successione limitata che converga puntualmente ad una successione non infinitesima; oppure usare gli Es. 1.6,9,10 (ℓ^∞ non è separabile, uno spazio riflessivo è necessariamente isomorfo al biduale).

Conseguenze: ℓ^∞ e c non sono riflessivi (c_0 è chiuso in entrambi); ℓ^1 non è riflessivo (v. Es. 1.9 oppure Es. 1.10 e usare *X di Banach è riflessivo $\Leftrightarrow$ duale riflessivo*).

Commenti: la stessa successione mostra che le sfere chiuse di c_0 non sono fortemente compatte.

Esercizio 1.28

Sia $X = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Mostrare che non è uno spazio riflessivo.

Sugg.: trovare una successione limitata di funzioni continue che converga puntualmente ad una funzione discontinua.

Commenti: la stessa successione mostra che le sfere chiuse di X non sono fortemente compatte.

Esercizio 1.29

Sia E il sottoinsieme di $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$,

$$E = \{f \in C^0([0,1]) : f(0) = f(1)\}\ .$$

Si dica se E è chiuso in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$; se è chiuso in $C^0([0,1])$ munito della topologia debole.

Sugg.: usare *conv. in $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ conv. puntuale*; mostrare che E è un sottospazio vettoriale (e quindi è convesso).

Esercizio 1.30

Si risponda alle domande dell'Es. 1.29 nel caso in cui

$$E = \{f \in C^0([0,1]) : f(0) \geq f(1)\}\ .$$

Esercizio 1.31

Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia

$$A = \{x \in X : \|Tx\| \leq 10\} .$$

Si provi che:

(31a) A è fortemente chiuso;

(31b) A non è fortemente compatto.

Si dica inoltre se A è debolmente chiuso.

Sugg.: per (31b) osservare che A contiene una sfera chiusa.

Esercizio 1.32

Sia X uno spazio di Banach, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ una famiglia di operatori di $\mathcal{L}(X)$ tale che:

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$;

(iii) $T(t)x$ è continua di $[0, +\infty)$ in X, per ogni $x \in X$;

cioè $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ è un *semigruppo di operatori fortemente continuo*. Si provi che esistono due costanti $M \geq 1$ e ω tali che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Sugg.: si applichi il teorema di Banach-Steinhaus agli operatori $T(t)$ per $t \in [0, 1]$ e poi si cerchi di maggiorare $\|T(t)\|$ in $[n, n+1]$, $n \geq 1$.

Esercizio 1.33*

Dimostrare che la famiglia di operatori su $X = (\{f \in C^0([0, +\infty)) : \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}, \|\cdot\|_\infty)$ definita da:

$$(T(t)f)(x) = f(x+t) ,$$

è un semigruppo fortemente continuo (v. Es. 1.32). Dimostrare inoltre che l'applicazione $[0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto T(t)$ non è continua.

Sugg.: per prima cosa controllare che $T(t)$ è lineare e continuo $\forall\, t \geq 0$ (vale $\|T(t)\| \equiv 1$) e che X è completo (è chiuso nello spazio delle funzioni reali limitate su $[0, +\infty)$ munito della $\|\cdot\|_\infty$); per verificare che $T(t)f \in C^0([0, +\infty); X)$ $\forall\, f \in X$ usare l'uniforme continuità di f (provarla). Per verificare che $t \mapsto T(t)$ non è continua controllare che $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 1$ $\forall\, t > 0$.

Esercizio 1.34

Si dica quali dei seguenti spazi di Banach sono uniformemente convessi: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$, $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, $(\ell^{10}, \|\cdot\|_{10})$, $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Esercizio 1.35

Sia X uno spazio di Banach. Si provi che X è uniformemente convesso se e solo se scelte comunque $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ in $B[0, 1]$ tali che $\|x_n + y_n\| \to 2$, allora $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Esercizio 1.36*

Sia X uno spazio di Banach. Per ogni $x \neq 0$ di X sia $\partial\|x\|$ il *subdifferenziale* di $\|x\|$, cioè l'insieme $\partial\|x\| = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1, \varphi(x) = \|x\|\}$.

(36a) Si provi che $\partial\|x\|$ non è vuoto ed è convesso.

(36b) Detta d la funzione, in generale a più valori, $d : X \setminus \{0\} \to S^* = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1\}$, $d(x) = \partial\|x\|$, si provi che se X è riflessivo allora d è suriettiva.

(36c) Si provi che se X^* è uniformemente convesso allora d è una funzione ad un valore ed è suriettiva.

Sugg.: per (36a) usare il teorema di Hahn-Banach dopo aver definito un funzionale opportuno su $X_1 = \langle x \rangle$; per (36b) usare il fatto che $\partial\|\varphi\|$ non è vuoto grazie a (36a) e che l'immersione canonica $X \to X^{**}$, $x \mapsto J_x$ è un isomorfismo di spazi normati; per (36c) calcolare $\|\varphi_1 + \varphi_2\|$ e usare l'Es. 1.35, oppure verificare che gli unici convessi di S^* sono i singoli punti.

RETI IN SPAZI TOPOLOGICI.

Definizione 1.1 (reti)

Una rete $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di un insieme X è un'applicazione $A \to X$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, dove A è un insieme diretto (dotato cioè di una relazione "$\geq$" che gode delle proprietà simmetrica e transitiva (preordine), tale che $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in A\ \exists \alpha_3 \in A : \alpha_3 \geq \alpha_1, \alpha_3 \geq \alpha_2$). Spesso per brevità indicheremo una rete solo con $\{x_\alpha\}$.

Esempi: una successione è una rete; una funzione $f : \mathbf{R} \to X$ è una rete; una funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{\xi\} \to X$ è una rete (dove $\alpha_1 \geq \alpha_2$ se $|\alpha_1 - \xi| \leq |\alpha_2 - \xi|$). Ricordiamo che un preordine che gode anche della proprietà antisimmetrica ($\alpha_1 \geq \alpha_2$ e $\alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$) si dice *ordine parziale* e *ordine totale* se inoltre due qualsiasi elementi sono confrontabili (ovviamente un insieme con ordine totale è sempre un insieme diretto).

Definizione 1.2 (sottoreti)

Sia $\{x_\alpha\}$ una rete di X. Si dice sottorete $\{x_{\alpha_\beta}\}_{\beta \in B}$ di $\{x_\alpha\}$ la rete $B \to X$, con B insieme diretto, ottenuta componendo la rete $\alpha \mapsto x_\alpha$ e un'applicazione $B \to A$, $\beta \mapsto \alpha_\beta$, tale che $\forall\, \overline{\alpha} \in A\ \exists\, \overline{\beta} \in B : \alpha_\beta \geq \overline{\alpha}\ \forall\, \beta \geq \overline{\beta}$ (in un certo senso stiamo dicendo che "$\alpha_\beta \to \infty$" per "$\beta \to \infty$").

Osservazione 1.1 Il concetto di sottorete generalizza quello di sottosuccessione; attenzione però: la cardinalità di B può essere tranquillamente maggiore di quella di A (l'applicazione $\beta \mapsto \alpha_\beta$ non è in generale iniettiva). In particolare nel caso $A = \mathbf{N}$, esistono sottoreti di una successione che: (i) non sono successioni; (ii) per $B = \mathbf{N}$ non sono sottosuccessioni. Per (i) verificare che $B : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{N}$, $\beta \mapsto [\beta]$ ($[\beta]$ = parte intera di β) definisce una sottorete $\{x_{[\beta]}\}$ di una successione $\{x_n\}$. Per (ii) provare che $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $k \mapsto n_k$ definisce una sottorete $\{x_{n_k}\}$ se e solo se $n_k \to \infty$ per $k \to \infty$ (non si chiede che $k \mapsto n_k$ sia crescente).

Definizione 1.3 (limite di una rete)
Sia (X, τ) uno spazio topologico, $\{x_\alpha\}$ una rete di X. Diciamo che $\{x_\alpha\}$ converge ad x, $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, se $\forall\, U \in \mathcal{F}_x$ (famiglia degli intorni di x), $\exists\, \alpha_U \in A : x_\alpha \in U\ \forall\, \alpha \geq \alpha_U$.
Naturalmente $\mathcal{F}_x$ si può sostituire con una qualsiasi base di intorni $\mathcal{B}_x$. Talvolta scriveremo semplicemente $x_\alpha \to x$, oppure $\lim x_\alpha = x$.

Proposizione 1.1 (limite delle sottoreti)
$x_\alpha \to x \Rightarrow x_{\alpha_\beta} \to x$ per ogni sottorete.

Dim.: esercizio.

Proposizione 1.2 (caratterizzazione degli spazi separati tramite reti)
Uno spazio topologico è di Hausdorff $\iff$ ogni rete convergente ha un unico limite.

Dim.: esercizio (solo "$\Rightarrow$").

Proposizione 1.3 (caratterizzazione dei punti aderenti tramite reti)
Un punto x è aderente a $I \subseteq (X, \tau) \iff \exists \{x_\alpha\} : x_\alpha \in I\ \forall\, \alpha,\ x_\alpha \to x$, cioè se e solo se è limite di una rete di I.

Dim. "$\Leftarrow$": immediata. "$\Rightarrow$": $\forall\, U \in \mathcal{F}_x$ si ha $U \cap I \neq \emptyset$; per ogni U scegliamo un $x_U \in U \cap I$. Allora $\{x_U\}$ è una rete di I perché $\mathcal{F}_x$ *è un insieme diretto* (poniamo $U \geq V$ se $U \subseteq V$: si tratta di un ordine parziale e inoltre $\forall\, U, V \in \mathcal{F}_x$, $U \cap V \in \mathcal{F}_x$, $U \cap V \geq U$, $U \cap V \geq V$); infine è chiaro che $x_U \to x$.

Proposizione 1.4 (caratterizzazione dei chiusi tramite reti)
$I \subseteq (X, \tau)$ è chiuso $\iff (\forall \{x_\alpha\} : x_\alpha \in I\ \forall\, \alpha,\ x_\alpha \to x \Rightarrow x \in I)$, cioè se e solo se contiene i limiti delle proprie reti convergenti.

Dim.: v. prop. precedente.

Commenti: per dimostrare che I non è chiuso, basta allora trovare *una* rete convergente (una successione va benissimo) il cui limite non appartiene ad I.

Proposizione 1.5 (caratterizzazione dei punti di accumulazione tramite reti)
Un punto x è di accumulazione per $I \subseteq (X, \tau) \iff \exists \{x_\alpha\} : x_\alpha \in I \setminus \{x\}\ \forall\, \alpha$, $x_\alpha \to x$, cioè se e solo se è limite di una rete di $I \setminus \{x\}$.

Dim.: esercizio.

Proposizione 1.6 (identificazione di topologie tramite reti)

Due topologie τ_1, τ_2 *su uno stesso insieme coincidono* $\Longleftrightarrow$ ($x_\alpha \stackrel{\tau_1}{\to} x \Leftrightarrow x_\alpha \stackrel{\tau_2}{\to} x$), *cioè se e solo se la convergenza per reti è equivalente.*

"$\Rightarrow$": ovvio. "$\Leftarrow$": ($x_\alpha \stackrel{\tau_1}{\to} x \Leftrightarrow x_\alpha \stackrel{\tau_2}{\to} x$) $\Leftrightarrow$ i punti aderenti di un sottoinsieme rispetto a τ_1 sono tutti e soli i punti di aderenti rispetto a τ_2 $\Leftrightarrow$ i chiusi rispetto a τ_1 sono tutti e soli i chiusi rispetto a τ_2, cioè le due topologie coincidono.

Proposizione 1.7 (caratterizzazione della continuità in un punto tramite reti)

$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *è continua in* $x_0 \in X \Longleftrightarrow (\forall \{x_\alpha\} : x_\alpha \stackrel{\tau}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_\alpha) \stackrel{\sigma}{\to} f(x_0))$, *cioè se e solo se conserva la convergenza delle reti in* x_0.

Dim.:"$\Rightarrow$": esercizio. "$\Leftarrow$": supponiamo per assurdo che f non sia continua in x_0, allora $\exists V \in \mathcal{F}_{f(x_0)}$ tale che $\forall U \in \mathcal{F}_{x_0}$ $\exists x \in U$, $f(x) \notin V$. Scegliendo, per ogni U, un $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \notin V$, si ha che $\{x_U\}$ è una rete e $x_U \to x_0$ (v. Prop. 1.3), ma $f(x_U)$ non converge ad $f(x_0)$.

Proposizione 1.8 (caratterizzazione della continuità tramite reti)

$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *è continua* $\Longleftrightarrow$ *conserva la convergenza delle reti.*

Dim.: immediata per la Prop. 1.7.

Commenti: per controllare che f non è continua basta allora trovare *una* rete (una successione va benissimo) per cui $x_\alpha \to x$ ma $f(x_\alpha)$ non converge ad $f(x)$. Osserviamo che la caratterizzazione della continuità appena fornita offre un'altra dimostrazione della Prop. 1.6. Infatti ($x_\alpha \stackrel{\tau_1}{\to} x \Leftrightarrow x_\alpha \stackrel{\tau_2}{\to} x$) $\Leftrightarrow$ $id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ *e* $id : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ *sono continue* $\Leftrightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$ *e* $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Proposizione 1.9 (caratterizzazione dei limiti di funzioni tramite reti)

Sia $f : (X, \tau) \setminus \{x_0\} \to (Y, \sigma)$*; allora* $f(x) \to L \in Y$ *per* $x \to x_0 \Longleftrightarrow (\forall \{x_\alpha\} : x_\alpha \stackrel{\tau}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_\alpha) \stackrel{\sigma}{\to} L)$.

Dim.: esercizio.

Proposizione 1.10 (caratterizzazione della compattezza tramite reti)

Uno spazio topologico è compatto se e solo se da ogni rete si può estrarre una sottorete convergente.

Dim.: v. Folland, Cap. 4, §4 (non richiesta).

Commenti: per controllare che uno spazio topologico non è compatto basta allora trovare *una* rete (una successione va benissimo) che non ammette *sottoreti* convergenti (attenzione: se si ha a che fare con una successione, *non bastano le sottosuccessioni*).

Esercizio 1.37

Una rete dello spazio prodotto di due spazi topologici converge se e solo se convergono le componenti.

Esercizio 1.38

Siano $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ due reti di reali. Dimostrare le seguenti affermazioni:

(38*a*) $x_\alpha \to x$, $z_\gamma \to z \Rightarrow x_\alpha + z_\gamma \to x + z$;

(38*b*) $x_\alpha \to x$, $z_\gamma \to z \Rightarrow x_\alpha z_\gamma \to xz$;

(38*c*) $x_\alpha \to x \neq 0 \Rightarrow \exists\, \overline{\alpha} : x_\alpha \neq 0$ per $\alpha \geq \overline{\alpha}$, $\{1/x_\alpha\}_{\alpha\geq\overline{\alpha}}$ converge a $1/x$;

(38*d*) le disuguaglianze si conservano (in senso lato) al limite (ad es. $x_\alpha \to x$, $x_\alpha > 0$ $\forall\, \alpha \Rightarrow x \geq 0$).

Sugg.: per (38*a*) e (38*b*) osservare innanzitutto che $A\times\Gamma$ diviene in modo naturale un insieme diretto ponendo $(\alpha_1,\gamma_1) \geq (\alpha_2,\gamma_2)$ se $\alpha_1 \geq \gamma_1$, $\alpha_2 \geq \gamma_2$, quindi $w_{(\alpha,\gamma)} = ax_\alpha + bz_\gamma$ e $r_{(\alpha,\gamma)} = x_\alpha z_\gamma$ sono delle reti di $\mathbf{R}$; per (38*c*) controllare che $\{\alpha \in A : \alpha \geq \overline{\alpha}\}$ è un insieme diretto.

Conseguenze: da (38*a*), (38*b*) segue che $x_\alpha \to x$, $z_\gamma \to z \Rightarrow ax_\alpha + bz_\gamma \to ax + bz$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.39

Dimostrare, usando le reti, che un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto e che un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico di Hausdorff è chiuso.

Esercizio 1.40

Dimostrare, usando le reti, che due funzioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff, coincidenti su un denso, coincidono dappertutto.

Esercizio 1.41

Dimostrare, usando le reti, che il grafico di una funzione continua a valori in uno spazio di Hausdorff è chiuso (rispetto alla topologia prodotto).

Esercizio 1.42

Dimostrare, usando le reti, che l'immagine continua di uno spazio topologico compatto è compatta.

Esercizio 1.43

Dimostrare, usando le reti, che il prodotto di due spazi topologici compatti (munito della topologia prodotto) è compatto.

Osservazione 1.2

Quanto visto mostra che, con le dovute cautele, le reti permettono di ragionare in spazi topologici arbitrari in modo del tutto analogo a come si ragiona con successioni negli spazi metrici (o più in generale in spazi soddisfacenti il primo assioma di numerabilità). Si controlli dove va aggiunta l'ipotesi del primo assioma di numerabilità nelle proposizioni e negli esercizi del presente paragrafo, in modo da dimostrare i risultati usando solo successioni.

RETI E TOPOLOGIE DEBOLI.

Esercizio 1.44

Sia X uno spazio normato, munito della topologia debole. Dimostrare le seguenti affermazioni:

(44a) $+ : X \times X \to X$, $(x, z) \mapsto x + z$ e $\cdot : \mathbf{R} \times X \to X$, $(c, z) \mapsto cz$ sono continue (usare le reti);

(44b) $x_\alpha \overset{deb.}{\to} x \Leftrightarrow x_\alpha - x \overset{deb.}{\to} 0 \Leftrightarrow \varphi(x_\alpha - x) \to 0 \; \forall \varphi \in X^* \Leftrightarrow \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x) \; \forall \varphi \in X^*$;

(44c) $x_\alpha \overset{deb.}{\to} x$, $z_\gamma \overset{deb.}{\to} z \Longrightarrow ax_\alpha + bz_\gamma \overset{deb.}{\to} ax + bz$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.

Sugg.: per (44c) v. sugg. Es. (1.38a) (oltre a ragionare direttamente sulla rete $ax_\alpha + bz_\gamma$, si può usare (44a) tramite l'Es. 1.37).

Commenti: la (44a) dice che uno spazio normato con la topologia debole è uno *spazio vettoriale topologico* (SVT), cioè uno spazio vettoriale munito di una topologia che rende continue le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare (ovviamente uno spazio normato con la topologia forte è uno SVT). Le proprietà precedenti valgono, con le dovute modifiche nella (44b), anche per X^* munito della topologia debole*. Si osservi che la famiglia di funzionali $\{\varphi_\lambda\}$ dell'Es. 1.17 è una rete di X^* ($A = (0, 1)$, λ_1"$\geq$"λ_2 se $\lambda_1 \leq \lambda_2$) e che la convergenza di cui si parla è proprio la convergenza di tale rete rispetto alla topologia debole*. La (44c) e la prima equivalenza nella (44b) sono valide in un qualsiasi SVT.

Esercizio 1.45

Dimostrare che la chiusura debole di un sottoinsieme convesso di uno spazio normato è un convesso.

Sugg.: usare (1.44c).

Esercizio 1.46

Si dimostri che $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ non sono riflessivi usando il teorema di Kakutani e la proposizione 1.10.

Sugg.: in entrambi i casi si trovi una successione in $B[0, 1]$ da cui non si può estrarre nessuna *sottorete* debolmente convergente (v. anche Es. 1.27 e Es. 1.28).

Esercizio 1.47

Sia E il sottoinsieme di $C^0([0, 1])$ definito da

$$E = \{f \in C^0([0, 1]) : |f(0)| \geq f(1)\} \, .$$

Si dica se E è chiuso in $X = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$; se è chiuso in $C^0([0, 1])$ munito della topologia debole.

Sugg.: v. Es. 1.29; per la seconda domanda ragionare con le reti, sfruttando il fatto che *conv. debole* $\Rightarrow$ *conv. puntuale* e l'Es. 1.38 (E non è convesso, dimostrarlo), oppure considerare $h : X \to \mathbf{R}$, $h(f) = |f(0)| - f(1)$.

Esercizio 1.48*

Sia X uno spazio normato di dimensione infinita. Si dimostri che $x \mapsto \|x\|$ da X (munito della topologia debole) in $\mathbf{R}$ non è continua in nessun punto.

Sugg.: è immediato in virtù di (1.44b) che $x \mapsto \|x\|$ non può essere continua in $x = 0$ (v. Prop. 1.6). Far vedere che se fosse continua in un punto x_0 sarebbe continua in $x = 0$ (ragionare per assurdo e usare la continuità delle traslazioni e delle omotetie assicurata da (1.44a)). Approccio che non ricorre alle reti: osservare che l'antimmagine di $(\|x_0\| - 1, \|x_0\| + 1)$, che è limitata, conterrebbe un aperto debole (impossibile in dimensione infinita).

Commenti: lo stesso risultato vale per $\varphi \mapsto \|\varphi\|$ da X^* (munito della topologia debole*) in $\mathbf{R}$; in realtà il ragionamento suggerito mostra, più in generale, che in qualsiasi spazio normato munito di una topologia che lo renda SVT e che non sia più fine della topologia forte (cioè che non contenga la topologia forte), l'applicazione $x \mapsto \|x\|$ non è continua in nessun punto.