Tracce di calcolo numerico[1]

Prof. Marco Vianello - Dipartimento di Matematica, Università di Padova
aggiornamento: 6 dicembre 2019

2 Soluzione numerica di equazioni non lineari

2.1 Metodo di bisezione e metodo di Newton

1. data una funzione $f \in C[a,b]$ (cioè, f continua in $[a,b]$), tale che $f(a)f(b) < 0$, si dimostri che la successione $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, costruita col metodo di bisezione (utilizzando iterativamente il teorema degli zeri) soddisfa la stima *a priori* dell' errore

$$e_n = |\xi - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \; , \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

   dove ξ è uno zero di f in (a,b); si diano ipotesi su f che garantiscono l'unicità dello zero

2. utilizzando la stima del punto 1, si calcoli il minimo numero di iterazioni del metodo di bisezione che garantisce un errore minore di ε, dove $\varepsilon > 0$ è una tolleranza prefissata

3. data una funzione continua f tale che $f(\xi) = 0$ ed una successione $\{x_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, perché in generale il "residuo" $|f(x_n)|$ non è una buona stima dell'errore? (si disegni il possibile andamento locale di f, se il grafico è "piatto" ...); come va corretto il residuo utilizzando la derivata di f? (residuo pesato)
   (traccia: assumendo f derivabile con derivata continua e non nulla in $[c,d]$, dove $x_n \in [c,d]$ almeno per n abbastanza grande, si utilizzi il teorema del valor medio, $f(x_n) - f(\xi) = f'(\alpha_n)(x_n - \xi)$, $\alpha_n \in int(x_n, \xi)$; si osservi che per la permanenza del segno la derivata è sicuramente non nulla in un intorno $[c,d]$ di uno zero semplice, ovvero ξ tale che $f'(\xi) \neq 0$)

4. se $|f'(x)| \geq k > 0$ in $[c,d]$, come può essere stimato l'errore tramite il residuo?

5. utilizzando i risultati del punto 3, si discuta la seguente stima *a posteriori* dell'errore (con correzione del residuo)

$$e_n = |\xi - x_n| \approx |f(x_n)| \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right|$$

6. si dia un'interpretazione geometrica del metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; , \; f'(x_n) \neq 0 \; , \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

7. un risultato di *convergenza globale del metodo di Newton*: data $f \in C^2[a,b]$, tale che $f(a)f(b) < 0$, con f'' di segno costante in $[a,b]$; scelto x_0 tale che $f(x_0)f''(x_0) > 0$, il metodo di Newton è ben definito e convergente all'unico zero di f in $[a,b]$

[1]argomenti e quesiti contrassegnati da * sono più impegnativi, se non si è in grado di fare la dimostrazione bisogna comunque sapere (e saper usare) gli enunciati e capire di cosa si sta parlando

(traccia: ci sono 4 configurazioni possibili (disegnarle); le tangenti alla curva grafico stanno sempre sopra o sotto la curva, la successione $\{x_n\}$ è monotona e limitata, quindi ha limite finito che è ..., passando al limite nella definizione del metodo ...)

8. detto $e_n = |\xi - x_n|$ l'errore assoluto del metodo di Newton per $f(x) = 0$, in ipotesi di convergenza e per $f \in C^2(I)$, dove $I \supset \{x_n\}$ è un intervallo chiuso e limitato in cui $f'(x) \neq 0$, si dimostri la disuguaglianza $e_{n+1} \leq Ce_n^2$ con C costante opportuna
traccia: utilizzando la formula di Taylor calcolata nella radice e centrata in x_n, $0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}((\xi - x_n)^2$, dove $z_n \in int(x_n, \xi)$, insieme alla definizione di $\{x_n\}$, si ottiene $\xi - x_{n+1} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$, e ... $C = \max_{x\in I} |f''(x)|/(2\min_{x\in I} |f'(x)|)$
$*$ approfondimento: partendo da tale disuguaglianza, perchè ci si aspetta *convergenza locale*? (cioè, partendo in un intorno opportuno della soluzione? si osservi che $Ce_{n+1} \leq (Ce_n)^2$, da cui $Ce_n \leq (Ce_0)^{2^n}$)

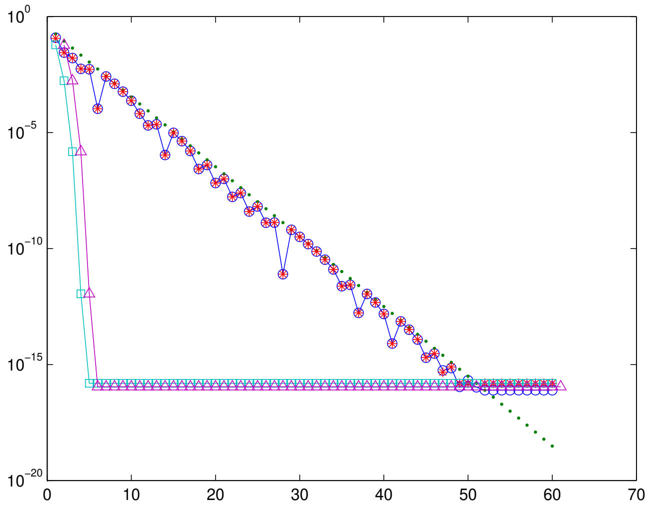
9. un metodo convergente ha *ordine di convergenza* almeno $p \geq 1$ se esiste $C > 0$ (con $C \in (0,1)$ per $p = 1$) tale che
$$e_{n+1} \leq Ce_n^p$$
e ordine esattamente p se vale
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = L > 0 \ ,$$
(con $L \in (0,1)$ per $p = 1$); quindi il metodo di Newton nel caso di uno zero semplice ha ordine almeno 2; quando ha ordine esattamente 2, e quando maggiore di 2?
per $p = 1$ si parla di convergenza *lineare* (con riferimento ad una scala logaritmica per gli errori), per $p > 1$ di convergenza *superlineare*, in particolare *quadratica* per $p = 2$; la costante L viene spesso chiamata *costante asintotica* del metodo
($*$ si osservi che per $p = 1$ le condizioni sono da sole sufficienti per la convergenza)

10. $*$ si mostri che per un metodo con ordine di convergenza (almeno) $p > 1$ esiste una costante $C' > 0$ tale che $C'e_n \leq (C'e_0)^{p^n}$
(traccia: si verifichi che $e_n \leq C\, C^p C^{p^2} \dots C^{p^{n-1}} e_0^{p^n} = \dots$, da cui ...)

11. si mostri che il metodo di Newton per il calcolo della radice k-esima di un numero reale $a > 0$, assume la forma
$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k}\, x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
(già nota in antichità come metodo di Erone nel caso della radice quadrata), dove x_0 va scelto tale che $x_0^k > a$

12. si giustifichi il fatto che nel calcolo di $\sqrt{2}$ risolvendo l'equazione $x^2 - 2 = 0$ nell'intervallo $(1, 2)$, il metodo di bisezione guadagna in media 1 cifra decimale significativa ogni 3-4 iterazioni, mentre il metodo di Newton raddoppia il numero di cifre significative ad ogni iterazione
(traccia: si ragioni sull'errore relativo, $\rho_n = e_n/|\xi|$; col metodo di bisezione "in media" $\rho_{n+1} \approx \rho_n/2$, ...; col metodo di Newton $\rho_{n+1} \leq C|\xi|\rho_n^2$, quindi se $C|\xi| \leq 1$ si ha che $\rho_{n+1} \leq \rho_n^2$ ...)

13. in figura gli errori relativi (in scala logaritmica) nell'approssimazione di $\sqrt{2}$ con il metodo di bisezione (errore effettivo: pallini; stima a priori: puntini; stima del residuo pesato: asterischi) e con il metodo di Newton (errore effettivo: quadratini; stima dello "step", $e_n \approx |x_{n+1} - x_n|$: triangolini); si osservi che lo step $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n)|/|f'(x_n)|$ è per costruzione un residuo "pesato"



14. si studino numericamente le seguenti equazioni "storiche":
    - $x^3 - 2x - 5 = 0$ (su questa equazione Newton illustrò il suo metodo)
    - $m = x - E \sin x$ (equazione di Keplero: m è l'anomalia media di un pianeta, E l'eccentricità della sua orbita, x l'anomalia eccentrica; si assuma ad esempio $m = 0.8$, $E = 0.2$)

    (traccia: isolare gli zeri anche graficamente, verificare l'applicabilità dei metodi di bisezione e di Newton, ...)

15. si studi la risolubilità dell'equazione $x - e^{-\alpha x} = 0$, $\alpha > 0$, con i metodi di bisezione e di Newton (l'equazione può anche essere interpretata come intersezione di grafici)

2.2 Iterazioni di punto fisso

1. un risultato di *convergenza delle iterazioni di punto fisso*: sia $\phi : I \to \mathbb{R}$ derivabile nell'intervallo chiuso $I \subseteq \mathbb{R}$, con (i): $\phi(I) \subseteq I$, e (ii): $|\phi'(x)| \leq \theta < 1$ per ogni $x \in I$; scelto un qualsiasi $x_0 \in I$, la successione $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, converge all'unico punto fisso di ϕ in I, ovvero $\xi \in I$ tale che $\xi = \phi(\xi)$ (si faccia vedere usando (ii) e il teorema del valor medio che ϕ "contrae le distanze" e che il punto fisso è unico in I; si osservi anche che I può essere non limitato, ovvero una semiretta chiusa o anche tutta la retta)
   (∗ traccia della dimostrazione (facoltativo): si provi che valgono le disuguaglianze $|x_{n+p} - x_n| \leq (1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{p-1})|x_{n+1} - x_n| \leq (\theta^n/(1 - \theta))|x_1 - x_0|$, da cui si vede che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi ha limite in I ...)

2. corollario (*convergenza locale*): sia ξ punto fisso di una funzione ϕ di classe C^1 in un intorno di ξ, con $|\phi'(\xi)| < 1$; allora la successione delle iterazioni di punto fisso converge a ξ a partire da qualsiasi x_0 in un intorno opportuno di ξ
(* traccia: detto $I = [\xi-\delta, \xi+\delta]$ un intorno chiuso di ξ in cui $|\phi'(x)| < 1$, che esiste per la permanenza del segno, si applichi il risultato precedente mostrando che $\phi(I) \subseteq I$; chi è θ?)

3. in ipotesi di convergenza, per le iterazioni di punto fisso valgono le stime di errore

$$|x_n - \xi| \leq \theta^n |x_0 - \xi| \quad \text{(a priori)}$$

$$|x_n - \xi| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - \phi'(z_n)} \leq \frac{1}{1-\theta} |x_{n+1} - x_n| \quad \text{(a posteriori)}$$

dove $z_n \in int(x_n, \xi)$; quando ha senso usare il solo step $|x_{n+1} - x_n|$ come stima a posteriori dell'errore?
(traccia: per la prima si osservi che per il teorema del valor medio $|x_{n+1} - \xi| = |\phi(x_n) - \phi(\xi)| = |\phi'(z_n)| |x_n - \xi| \leq \theta |x_n - \xi|$; per la seconda si osservi che $x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - \xi + \xi - x_n = \phi'(z_n)(x_n - \xi) + \xi - x_n$, ...)

4. si mostri che l'equazione $x - e^{-\alpha x} = 0$, $0 < \alpha < 1$, è risolubile con le iterazioni di punto fisso; quante iterazioni occorrono per garantire un errore assoluto $< 10^{-8}$ con $\alpha = 1/5$?

5. *ordine di convergenza* delle iterazioni di punto fisso: si dimostri che un'iterazione di punto fisso $x_{n+1} = \phi(x_n)$, con $\phi \in C^p$ in un intorno di ξ, ha ordine 1 se e solo se $|\phi'(\xi)| \in (0, 1)$ e ha ordine $p > 1$ se e solo se $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ e $\phi^{(j)}(\xi) = 0$, $1 \leq j \leq p-1$

   traccia per $p > 1$: per la formula di Taylor $x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi) = \phi'(\xi)(x_n - \xi) + \ldots + \phi^{(p-1)}(\xi)(x_n - \xi)^{p-1}/(p-1)! + \phi^{(p)}(z_n)(x_n - \xi)^p/p!$ con $z_n \in int(x_n, \xi)$, ...; per il "solo se" si osservi che assumendo ordine p, se esistesse $1 \leq j < p$ tale che $\phi^{(j)}(\xi) \neq 0$, ponendo $k = \min\{1 \leq j < p : \phi^{(j)}(\xi) \neq 0\}$ si avrebbe $e_{n+1}/e_n^p = (e_{n+1}/e_n^k)e_n^{k-p}$ con $k - p < 0$, ...

6. perché il metodo di Newton si può interpretare come iterazione di punto fisso? quando ci si aspetta ordine di convergenza $p > 2$?
(traccia: il metodo di Newton corrisponde a un'iterazione di punto fisso con $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$, quindi $\phi' = f\,f''/(f')^2$ e se $f'(\xi) \neq 0$ si ha che $\phi'(\xi) = 0$ ...)

7. * (*metodo di Newton per radici multiple*): se ξ è radice multipla di molteplicità $m > 1$, ovvero $f^{(j)}(\xi) = 0$, $j = 1, \ldots, m-1$ e $f^{(m)}(\xi) \neq 0$, il metodo di Newton risulta di ordine $p = 1$ con costante asintotica $L = 1 - 1/m$; se m è nota, il metodo modificato $x_{n+1} = x_n - m\,f(x_n)/f'(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, torna di ordine $p \geq 2$

   traccia: si osservi che (utilizzando la formula di Taylor) $f \sim \alpha\delta^m$, $f' \sim m\alpha\delta^{m-1}$ e $f'' \sim m(m-1)\alpha\delta^{m-2}$ per $x \to \xi$ con con $\delta = x - \xi$ e $\alpha = \ldots$ costante non nulla, da cui (si veda il punto precedente) $\phi'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \phi'(x) = (m-1)/m = 1 - 1/m$; d'altra parte il metodo modificato corrisponde ad un'iterazione di punto fisso con $\phi(x) = x - mf(x)/f'(x)$ e $\phi'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \phi'(x) = ... = 0$