Tracce di calcolo numerico [1]

Prof. Marco Vianello - Dipartimento di Matematica, Università di Padova
aggiornamento: 18 aprile 2020

3 Interpolazione e approssimazione

3.1 Interpolazione polinomiale

1. problema algebrico dell'interpolazione (costruzione): dati $n+1$ punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, sul grafico di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, determinare se esiste ed è unica una funzione f_n in una opportuna famiglia di funzioni $\mathcal{F}_n$, tale che
$$f_n(x_i) = f(x_i)\ ,\ i = 0, \dots, n$$
(nel caso di $\mathcal{F}_n = \mathbb{P}_n$, lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$, si parla di interpolazione polinomiale, e chiameremo $\Pi_n(x) = f_n(x)$ il polinomio interpolatore)

2. problema analitico dell'interpolazione (convergenza): per quali scelte dei nodi $\{x_i\}$ e in quali ipotesi su f si ha convergenza uniforme degli interpolatori, cioè
$$dist(f_n, f) = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0\ ,\quad n \to \infty\ ?$$

3. perché il polinomio interpolatore $\Pi_n(x)$ di grado $\leq n$ di una funzione f su $n+1$ nodi distinti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è unico?
(traccia: se esistessero due polinomi interpolatori distinti, la loro differenza si annullerebbe in tutti i nodi e per il teorema fondamentale dell'algebra ...)

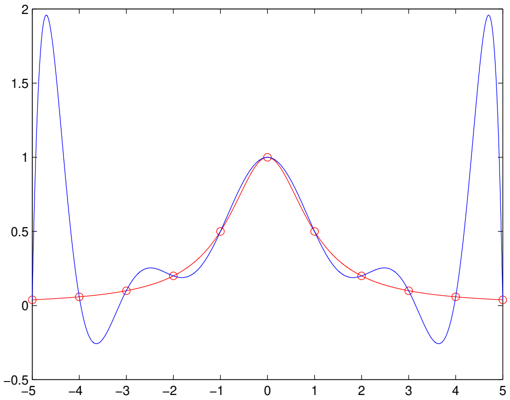
4. si mostri che
$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x)\ ,\quad \ell_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$
è il polinomio interpolatore su $n+1$ nodi distinti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (si tratta della cosiddetta "forma di Lagrange" del polinomio interpolatore; siccome $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$, ...)

5. il problema di interpolazione polinomiale di grado n su $n+1$ nodi è equivalente al sistema lineare $Va = y$, dove $V = (v_{ij}) = (x_i^j)$, $0 \leq i,j \leq n$ è detta "matrice di Vandermonde" dei nodi di interpolazione, $a = (a_0, \dots, a_n)^t$ e $y = (y_0, \dots, y_n)^t$, $y_i = f(x_i)$

6. forma di Lagrange dell'errore di interpolazione di grado n per $f \in C^{n+1}[a,b]$ (si noti l'analogia con il resto della formula di Taylor):
$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\,(x - x_0) \dots (x - x_n)$$
dove $\eta \in int(x, x_0, \dots, x_n)$
($*$ traccia della dimostrazione (facolt.): si utilizzi la funzione (di variabile z) $G(z) = E_n(z) - \omega(z)(E_n(x)/\omega(x))$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ fissato, dove $\omega(z) = (z - x_0) \dots (z - x_n)$, e si applichi ripetutamente il teorema di Rolle)

[1] argomenti e quesiti contrassegnati da * sono più impegnativi, se non si è in grado di fare la dimostrazione bisogna comunque sapere (e saper usare) gli enunciati e capire di cosa si sta parlando

7. con la forma di Lagrange dell'errore di interpolazione polinomiale di grado n per $f \in C^{n+1}[a,b]$, si dimostra che $dist(\Pi_n, f) \leq \max_{x\in[a,b]} \{|f^{(n+1)}(x)|\} (b-a)^{n+1}/(n+1)!$, e che nel caso di nodi equispaziati $dist(\Pi_n, f) \leq \max_{x\in[a,b]} \{|f^{(n+1)}(x)|\} h^{n+1}/(4(n+1))$ dove $h = (b-a)/n$ (dim. non richiesta); perché da questa stime non si può dedurre la convergenza per $f \in C^\infty[a,b]$? (si pensi al controesempio di Runge, $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5,5]$, in cui accade che $dist(\Pi_n, f) \to \infty$, $n \to \infty$; in figura i grafici della funzione di Runge e del polinomio interpolatore di grado 10 su 11 nodi equispaziati, si notino le oscillazioni dell'interpolatore verso gli estremi)



8. interpolazione di Chebyshev: abbiamo visto che in generale i polinomi interpolatori non convergono alla funzione campionata (controesempio di Runge su nodi equispaziati); scelte speciali dei nodi però assicurano tale convergenza, è il caso ad esempio dell'interpolazione polinomiale sui nodi di Chebyshev

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) + \frac{b+a}{2} \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

si noti che tali nodi, che corrispondono alla proiezione su $[a,b]$ di punti equispaziati sulla semicirconferenza di centro $(a+b)/2$ e raggio $(b-a)/2$, non sono equispaziati ma si accumulano più rapidamente agli estremi dell'intervallo; si può dimostrare (dim. non richiesta) che, detto $\Pi_n^{\text{Cheb}}(x)$ il polinomio interpolatore sui nodi di Chebyshev, per ogni $f \in C^k[a,b]$, $k > 0$, esiste una costante c_k tale che

$$dist(\Pi_n^{\text{Cheb}}, f) = \max_{x\in[a,b]} |\Pi_n^{\text{Cheb}}(x) - f(x)| \leq c_k \frac{\log(n)}{n^k},$$

e quindi si ha convergenza uniforme per $n \to \infty$ (in particolare per la funzione del controesempio di Runge)

9. si mostri che la "risposta alle perturbazioni" su f dell'interpolazione polinomiale è legata alla quantità $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$ (costante di Lebesgue), dove gli $\{\ell_i\}$ sono i polinomi elementari di Lagrange; si osservi che Λ_n dipende solo dai nodi di interpolazione
(traccia: si utilizzi la forma di Lagrange del polinomio interpolatore, detto $\tilde{\Pi}_n(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{f}(x_i)\ell_i(x)$ il polinomio interpolatore sui dati perturbati $\{\tilde{f}(x_i)\}$ dove $|\tilde{f}(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$, si ha $|\tilde{\Pi}_n(x) - \Pi(x)| \leq \ldots \leq \varepsilon\Lambda_n$)

10. è noto che per qualsiasi distribuzione di nodi la costante di Lebesgue ha crescita almeno logaritmica, $\Lambda_n \geq c_1 \log n$, che per i nodi equispaziati $\Lambda_n \sim c_2 \frac{2^n}{n \log n}$ (instabilità), mentre per i nodi di Chebyshev $\Lambda_n = \mathcal{O}(\log n)$ (c_1 e c_2 sono opportune costanti)

11. $*$ (approfondimento facoltativo per matematici) dati $n+1$ nodi distinti in $[a,b]$, si consideri l'operatore lineare (verificare la linearità) $L_n : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\infty)$, $L_n f \mapsto \Pi_n$ (che manda f nel polinomio interpolatore); si osservi che per l'unicità dell'interpolatore $L_n p = p\ \forall p \in \mathbb{P}_n$; si dimostri che è continuo verificando che vale la stima
$$\|L_n f\|_\infty \leq \Lambda_n \, \|f\|_\infty \,,$$
ovvero $\|L_n\| \leq \Lambda_n$ (in realtà si può provare che $\|L_n\| = \Lambda_n$) e si ottenga la stima di errore
$$\|f - L_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \, \|f - p_n^*\|_\infty$$
dove p_n^* è il cosiddetto polinomio di migliore approssimazione uniforme di f in $\mathbb{P}_n$ su $[a,b]$, ovvero $\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$
(traccia per la stima di errore: $\|f - L_n f\|_\infty \leq \|f - p_n^*\|_\infty + \|p_n^* - L_n p_n^*\|_\infty + \|L_n p_n^* - L_n f\|_\infty = \|f - p_n^*\|_\infty + \|L_n p_n^* - L_n f\|_\infty \leq \ldots$)

    osservazione: se $f \in C^k[a,b]$ si ha $\|f - p_n^*\|_\infty = \mathcal{O}(n^{-k})$ (teorema di Jackson), che insieme al punto 10 sulla crescita della costante di Lebesgue implica il risultato di convergenza uniforme dell'interpolazione di Chebyshev al punto 8

3.2 Interpolazione polinomiale a tratti

1. nell'interpolazione polinomiale a tratti di grado s su $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, dove n è multiplo di s, si costruisce una funzione continua $\Pi_s^c(x)$ tale che $\Pi_s^c(x)$ sia il polinomio interpolatore di grado fissato s sui nodi $x_{ks}, x_{ks+1}, \ldots, x_{(k+1)s}$, $0 \leq k \leq \frac{n}{s} - 1$ (si osservi che $\Pi_s^c(x)$ si ottiene "incollando" per continuità pezzi polinomiali e che in generale i punti di raccordo x_{ks} sono punti angolosi della funzione interpolante)

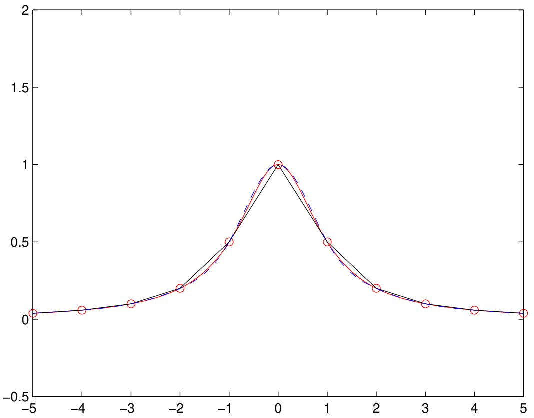
2. si dimostri che l'interpolazione lineare a tratti ($s = 1$, disegnarla) converge uniformemente per $f \in C^2[a,b]$ con un errore $\mathcal{O}(h^2)$, dove $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, $h = \max_i \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$
(traccia: si utilizzi su ogni intervallino $[x_i, x_{i+1}]$ la stima dell'errore di interpolazione polinomiale di grado 1)

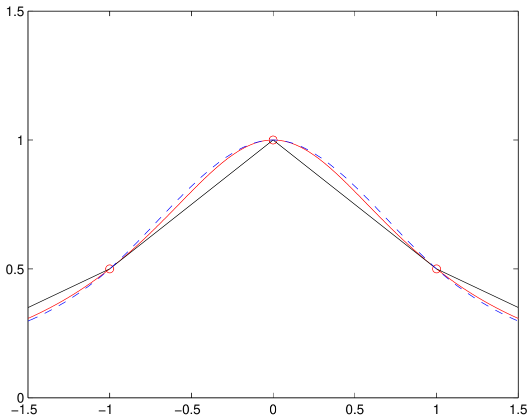
3. $*$ si dimostri che l'interpolazione quadratica a tratti ($s = 2$, disegnarla) converge uniformemente per $f \in C^3[a,b]$ con un errore $\mathcal{O}(h^3)$, dove $h = \max_i \Delta x_i$; c'è qualche vincolo sul numero di nodi? si utilizzi poi la stima trovata per decidere a priori quanti nodi usare nell'interpolazione quadratica a passo costante di $f(x) = \sin(x)$ in $[0, \pi]$ per avere un errore $< 10^{-8}$
(traccia: si utilizzi localmente la stima dell'errore di interpolazione polinomiale di grado 2)

4. nell'interpolazione spline di grado s su $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, si cerca $S_s \in C^{s-1}[a,b]$ tale che S_s ristretta a $[x_i, x_{i+1}]$ sia un polinomio di grado al più s e $S_s(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$; chi sono le incognite in questo problema, quante sono le equazioni (vincoli)? nel caso cubico, come si ottiene un sistema quadrato?

5. è noto che se $f \in C^4[a,b]$, $dist(S_3^{(j)}, f^{(j)}) = \mathcal{O}(h^{4-j})$, $0 \le j \le 3$ (le derivate di S_3 non sono però interpolanti)

6. nella prima figura i grafici della funzione di Runge e delle spline interpolanti lineare e cubica (tratteggiata) su 11 nodi equispaziati, nella seconda figura un particolare





3.3 Approssimazione polinomiale ai minimi quadrati

1. dato un campionamento $\{(x_i, y_i)\}$, $y_i = f(x_i)$, $1 \le i \le N$, nell'approssimazione ai *minimi quadrati* invece di interpolare si cerca un polinomio p di grado $m < N$ (tipicamente $m \ll N$) tale che la somma degli scarti quadratici $\sum_{i=1}^{N} (y_i - p(x_i))^2$ sia minima, ovvero si risolve il problema di minimo in $m+1$ variabili $a = (a_0, \ldots, a_m)$

$$\min_{a \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=1}^{N} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m))^2$$

che ha soluzione unica, calcolabile risolvendo il sistema lineare $V^t V a = V^t y$, dove $V = (v_{ij}) = (x_i^j)$, $1 \le i \le N$, $0 \le j \le m$ è una matrice di Vandermonde rettangolare $N \times (m+1)$ e $V^t V$ è una matrice $(m+1) \times (m+1)$ simmetrica e definita positiva

(traccia: si tratta della soluzione ai minimi quadrati del sistema sovradeterminato $Va = y$, si veda la sezione di Algebra Lineare Numerica)

2. $*$ detto L_m il polinomio dei minimi quadrati, si può dimostrare (dim. non richiesta) che se $h = \max_i \Delta x_i \leq \theta(b-a)/m^2$, $0 < \theta < 1$, allora per ogni $f \in C^k[a,b]$, $k > 1$, esiste una costante c_k tale che $dist(L_m, f) = \max_{x \in [a,b]} |L_m(x) - f(x)| \leq c_k\, m^{1-k}$

3. in figura il polinomio dei minimi quadrati di grado $m = 8$ (puntini) e di grado $m = 10$ (tratteggio), ottenuti da un campionamento con rumore su $N = 200$ punti (linea frastagliata) della funzione $\sin(10x)$ in $[-1, 1]$ (linea continua)