6 Fondamenti di teoria dell'approssimazione

aggiornamento: 14 aprile 2014

(!) indica un argomento fondamentale, (F) un argomento facoltativo, ($*$) un argomento o dimostrazione impegnativi, (NR) una dimostrazione non richiesta; per approfondimenti di analisi numerica, si vedano ad es. V. Comincioli: Analisi Numerica - McGraw-Hill cartaceo e Apogeo e-book, G. Rodriguez: Algoritmi Numerici - Pitagora, e le dispense online di A. Sommariva in http://www.math.unipd.it/∼alvise/didattica con le referenze citate; per approfondimenti di analisi funzionale si veda ad es. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale - Mir; per le basi sulle differenze finite per equazioni differenziali si veda ad es. A. Quarteroni, F. Saleri: Introduzione al calcolo scientifico - Springer.

6.1 Densità e migliore approssimazione

1. (!) sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio funzionale normato, ad esempio $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ oppure $(L^2(-\pi,\pi), \|\cdot\|_2)$, e $S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$ una successione crescente di sottospazi di dimensione finita $N_n = dim(S_n)$, ad esempio i polinomi $\mathbb{P}_n = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle$ con $N_n = n+1$, oppure i polinomi trigonometrici reali $\mathbb{T}_n = \mathbb{T}_n^{\mathbb{R}} = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx) \rangle$ o complessi $\mathbb{T}_n^{\mathbb{C}} = \langle 1, \exp(ix), \exp(-ix), \ldots, \exp(inx), \exp(-inx) \rangle$ con $N_n = 2n+1$ (si verifichi che $\mathbb{T}_n^{\mathbb{C}} \supset \mathbb{T}_n^{\mathbb{R}}$).

   Si dimostri in generale che $E_n(f) = \inf_{p \in S_n} \|p - f\| \to 0$, $n \to \infty$ se e solo se $\bigcup_n S_n$ è denso in X.

2. (!) *teoremi di densità di Weierstrass*: ogni funzione continua in $[a,b]$ è limite uniforme di una successione di polinomi (NR); ogni funzione continua e periodica in $[-\pi,\pi]$ è limite uniforme di una successione di polinomi trigonometrici (NR). Dedurne la densità di $\mathbb{P} = \bigcup_n \mathbb{P}_n$ in $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ e (F$*$) di $\mathbb{T} = \bigcup_n \mathbb{T}_n$ in $(C[-\pi,\pi], \|\cdot\|_2)$.

3. l'*inf* del primo esercizio è in realtà un minimo (in generale, dato uno spazio normato e un suo sottospazio di dimensione finita $S = \langle \phi_1, \ldots, \phi_N \rangle$, $dim(S) = N$, esiste in S almeno un *elemento di distanza minima* da $f \in X$); sugg.: $\inf_{p \in S} \{\|p - f\|\} \leq \|0 - f\| = \|f\|$ ed essendo in dimensione finita le palle chiuse ... .

4. (!) il polinomio in $\mathbb{P}_n$ di migliore approssimazione uniforme per $f \in C[a,b]$, che indichiamo con p_n^*, è unico (NR) ma è difficile da calcolare (algoritmo di Remez (NR)); si può però dimostrare (NR) il seguente *teorema di Jackson*: se $f \in C^r[a,b]$, $r \geq 0$, allora

$$E_n(f) = \|p_n^* - f\|_\infty \leq c_r \, osc(f^{(r)}; (b-a)/n) \, \frac{(b-a)^r}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} \, , \; n > r$$

con $c_r > 0$ indipendente da a, b, f (dove l'oscillazione di passo $h > 0$ di una funzione $g \in C[a, b]$ è definita come $\max_{|x-y| \leq h} \{|g(x) - g(y)|\}$).

Se $f \in C^{r+\alpha}[a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$, cioè $f^{(r)}$ è Hölderiana di esponente α, allora $E_n(f) = \mathcal{O}\left(n^{-(r+\alpha)}\right)$ (dove g si dice Hölderiana di esponente α se esiste una costante L tale che $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, e Lipschitziana se $\alpha = 1$).

Si può inoltre dimostrare (NR) che se f è analitica (olomorfa) in un aperto del piano complesso $\Omega \supset [a, b]$, esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che $E_n(f) = \|p_n^* - f\|_\infty = \mathcal{O}(\theta^n)$, e che se f è intera ($\Omega = \mathbb{C}$) la convergenza diventa superlineare, $\limsup_{n\to\infty}(E_n(f))^{1/n} = 0$.

5. (!) se X è uno spazio euclideo con la norma $\|f\|_X = (f, f)^{1/2}$ indotta da un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$, l'elemento (unico) di distanza minima è la *proiezione ortogonale* $\pi_S = \pi_S f$ di f su S (approssimazione ai minimi quadrati), che si calcola risolvendo il sistema $G\{c_j\} = \{(f, \phi_i)\}$ dove $G = \{g_{ij}\} = \{(\phi_j, \phi_i)\}$ è la matrice di Gram di una qualsiasi base $\{\phi_j\}$; sugg.: considerando per semplicità il caso reale, si tratta di minimizzare nelle variabili $\{c_j\}$ la funzione quadratica $\|f - \sum c_j\phi_j\|^2$, il cui gradiente è ... (si osservi che la matrice di Gram è simmetrica e definita positiva). In generale, $\|f - \phi\|$ è minima in S se e solo se $\|f - \phi + \lambda g\|^2 \geq \|f - \phi\|^2$ per ogni $g \in S$ e $\lambda > 0$, da cui si arriva alla disuguaglianza $\lambda^2\|g\|^2 + 2\lambda Re(f - \phi, g) \geq 0$, ... ; si osservi poi che $(f - \phi, g) = 0$ per ogni $g \in S$ se e solo se $f - \phi$ è ortogonale a tutti gli elementi di base, ...

6. se è nota una base ortogonale $\{\phi_j\}$ di S, allora $c_j = (f, \phi_j)/(\phi_j, \phi_j)$: ad esempio, le basi canoniche (si veda il primo esercizio) di $\mathbb{T}_n$ sono ortogonali.

7. (F$*$) si esplori il legame tra i risultati precedente e l'approssimazione discreta ai minimi quadrati in uno spazio funzionale di dimensione finita: in generale, dato un insieme di nodi $\{x_k,\ 1 \leq k \leq M\}$, $M > N$, e la matrice rettangolare di tipo Vandermonde $V = \{\phi_j(x_k)\}$, chi è la matrice $\overline{V}^t V$ del sistema delle equazioni normali? inoltre, la soluzione delle equazioni normali con la fattorizzazione $V = QR$ corrisponde al procedimento di ortonormalizzazione di $\{\phi_j\}$ rispetto al prodotto scalare discreto ... .

8. se $\{\phi_j\}_{j\geq1}$ è una successione ortogonale in X, la serie $\sum c_j\phi_j$ (serie di Fourier generalizzata) converge a f se e solo se $\bigcup_k\langle\phi_1, \ldots, \phi_k\rangle$ è denso in X (si veda il primo esercizio). ($*$) Esempio: le serie trigonometriche, visto che $\mathbb{T}$ è denso in $(C[-\pi, \pi], \|\cdot\|_2)$ (si veda il secondo esercizio) e anche in $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ (NR).

9. (F) dall'uguaglianza $\|\pi_S - f\|^2 + \|\pi_S\|^2 = \|f\|^2$ (teorema di Pitagora) si ottiene che data una successione di sottospazi di dimensione finita $S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$, si ha che $\lim_{n\to\infty}\|\pi_{S_n} - f\| = 0$ se e solo se $\lim_{n\to\infty}\|\pi_{S_n}\|^2 = \|f\|^2$ (identità di Parseval).

10. lo sviluppo di $f \in C[a, b]$ in serie di polinomi ortogonali rispetto ad una misura $d\mu = w(x)dx$ su (a, b), $w \in L^1_+(a, b)$, è convergente in $\|\cdot\|_{2,w}$ (si veda l'inizio

della sezione 1.1.3: i polinomi si ottengono ortogonalizzando con Gram-Schmidt la base canonica, quindi i primi $n+1$ sono una base di $\mathbb{P}_n$, e per il t. di densità di Weierstrass ...); d'altra parte si dimostra facilmente la catena di disuguaglianze $\|f - \pi_{\mathbb{P}_n}\|_{2,w} \leq \|f - p_n^*\|_{2,w} \leq \sqrt{\|w\|_1}\, \|f - p_n^*\|_\infty$, che permette di stimare la velocità di convergenza della serie col t. di Jackson.

11. (F) se i coefficienti dello sviluppo trigonometrico di f (proiezione ortogonale su $\mathbb{T}_n$) vengono approssimati tramite una formula di quadratura su $2n+1$ punti equispaziati $x_k = -\pi+\pi k/n$, $0 \leq k \leq 2n$, ovvero $(f, \phi_j) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ijx)dx \approx \sum_{k=0}^{2n} w_k f(x_k) \exp(-ijx_k)$, $-n \leq j \leq n$, questi possono essere ottenuti tramite il famoso algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), che calcola la *trasformata discreta di Fourier* di un generico vettore complesso $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{M-1}\}$, ovvero le M somme $\sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k \exp(-2\pi ikh/M)$, $0 \leq h \leq M-1$, con $\mathcal{O}(M \log M)$ invece che $\mathcal{O}(M^2)$ operazioni aritmetiche.

6.2 Interpolazione

1. (!) dato un sottospazio di dimensione finita $S = \langle \phi_1, \ldots, \phi_N \rangle \subset C(K)$ (lo spazio delle funzioni continue su un compatto $K \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$), un insieme di punti $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset K$ si dice *unisolvente* per il problema di interpolazione se $det(V) \neq 0$, dove $V = V(x_1, \ldots, x_N)$ è la matrice quadrata di tipo *Vandermonde* $V = \{v_{ij}\} = \{\phi_j(x_i)\}$; si controlli che data $f \in C(K)$ la funzione (unica) in S che interpola f su $\{x_1, \ldots, x_N\}$ si può scrivere in *forma di Lagrange*

$$Lf(x) = L_{\{x_i\}} f(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, \ell_i(x)$$

dove $\langle \ell_1, \ldots, \ell_N \rangle = S$ è la base di funzioni "cardinali"

$$\ell_i(x) = \ell_{x_i}(x) = \frac{det(V(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_N))}{det(V(x_1, \ldots, x_N))}\ , \quad \ell_i(x_k) = \delta_{ik}$$

(che non dipende dalla base di partenza, perché ...).

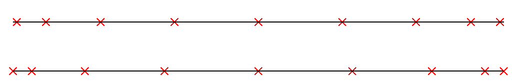
2. nel caso polinomiale, $S = \mathbb{P}_n$, in una variabile $\ell_i(x) = \prod_{k \neq i} (x - x_k)/(x_i - x_k)$ e la matrice V è non singolare se e solo se i punti di interpolazione sono distinti; in d variabili, $d \geq 2$, un insieme di $N = dim(\mathbb{P}_n) = \binom{n+d}{d}$ punti distinti non è in generale unisolvente, si faccia un esempio nel piano dove $\mathbb{P}_n = \langle x^h y^k,\ 0 \leq h + k \leq n \rangle$ e $N = (n+1)(n+2)/2$ (sugg.: se i punti stanno su una retta, una circonferenza o in generale una curva algebrica ...).

3. (!) dato un insieme unisolvente di punti di interpolazione, la norma dell'operatore lineare e continuo di interpolazione $L : (C(K), \|\cdot\|_\infty) \to S$, $f \mapsto Lf = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, \ell_i$, è definita da $\|L\| = \sup_{f \neq 0} \|Lf\|_\infty / \|f\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|Lf\|_\infty$, e si ha

$$\|L\| \leq \max_{x \in K} \sum_{i=1}^{N} |\ell_i(x)|$$

((∗) in realtà $\|L\| = \max_{x\in K} \sum_{i=1}^{N} |\ell_i(x)|$; si noti che $\|L\|$ dipende solo dai punti di interpolazione). Si studi il ruolo di $\|L\|$ per la *stabilità dell'interpolazione* (risposta dell'interpolante agli errori su f).

4. (!) nel caso polinomiale ($S = \mathbb{P}_n$), $\Lambda_n = \|L\|$ si chiama *costante di Lebesgue* dei punti di interpolazione ed è invariante per trasformazioni affini $t = \sigma(x) = Ax + b$ con A invertibile ((F∗) sugg.: si osservi che fissata $g \in C(\sigma(K))$, detta $f(x) = g(\sigma(x))$ per l'unicità dell'interpolante si ha $L_{\{\sigma(x_i)\}}g(t) = L_{\{x_i\}}f(\sigma^{-1}(t))$, ...). In una variabile, $K = [a, b]$, $N = n + 1$, è noto che (NR): i punti equispaziati $x_i = a + i(b - a)/n$, $0 \leq i \leq n$, hanno una costante di Lebesgue che cresce esponenzialmente in n, $\Lambda_n \sim 2^n/(en \log n)$; invece ad esempio i *punti di Chebyshev*
$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right) + \frac{b+a}{2} \ , \quad 0 \leq i \leq n$$
(che sono gli zeri del polinomio $T_{n+1}((2x-b-a)/(b-a))$ dove $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ è il polinomio di Chebyshev di grado n per $t \in [-1, 1]$), oppure i *punti di Chebyshev-Lobatto*
$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) + \frac{b+a}{2} \ , \quad 0 \leq i \leq n$$
hanno $\Lambda_n = \mathcal{O}(\log n)$ (questa crescita è quasi ottimale perché si può dimostrare (NR) che la costante di Lebesgue per l'interpolazione su un intervallo ha crescita *almeno* logaritmica nel grado). In figura i 9 punti di Chebyshev (sopra) e Chebyshev-Lobatto (sotto) per grado 8 (si noti che i secondi comprendono gli estremi dell'intervallo mentre i primi sono interni).



5. (!) vale la seguente *stima fondamentale per l'errore di interpolazione*
$$\|f - Lf\|_\infty \leq (1 + \|L\|) \min_{p\in S} \|p - f\|_\infty$$
(sugg.: la disuguaglianza in realtà è valida per qualsiasi *operatore di proiezione* (lineare e continuo), cioè tale che $Lp = p$ per ogni $p \in S$, ...). La stima mostra

che controllando $\|L\|$ si controlla non solo la stabilità, ma anche la discrepanza fra l'interpolazione e la migliore approssimazione.

Data una successione di sottospazi $S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots \subset (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ e di operatori di proiezione $L_n : (C(K), \|\cdot\|_\infty) \to S_n$, la stima fondamentale mostra che se $\lim_{n\to\infty} \|L_n\| \, E_n(f) = 0$ allora $L_n f$ converge uniformemente ad f per ogni fissata funzione continua su K. Nel caso polinomiale univariato, si studi la velocità di convergenza dell'interpolazione sui punti di tipo Chebyshev (sugg.: in base al t. di Jackson ...).

6. (F) interpolazione polinomiale bivariata di tipo *prodotto tensoriale*: si consideri lo spazio dei polinomi bivariati prodotto tensoriale di grado $\leq n$, $\mathbb{P}_n^1 \otimes \mathbb{P}_n^1 = \langle x^h y^k, \ 0 \leq h, k \leq n \rangle$ (si osservi che $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_n^1 \otimes \mathbb{P}_n^1 \subset \mathbb{P}_{2n}$ e che $dim(\mathbb{P}_n^1 \otimes \mathbb{P}_n^1) = (n+1)^2$). In qualsiasi rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, l'insieme prodotto $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \times \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$, dove $\{x_i\} \subset [a, b]$ e $\{y_j\} \subset [c, d]$ sono insiemi di $n+1$ punti distinti, è unisolvente per l'interpolazione in $\mathbb{P}_n^1 \otimes \mathbb{P}_n^1$ e l'interpolante si scrive

$$Lf(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n+1} f(x_i, y_j) \ell_i(x) \ell_j(y)$$

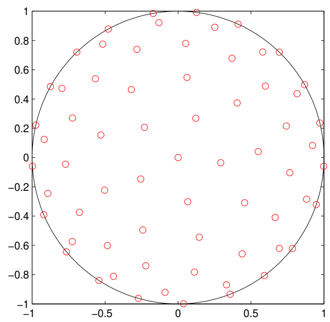
dove ℓ_i, ℓ_j sono i polinomi elementari di Lagrange in x e y (si verifichi direttamente che $Lf(x)$ è interpolante; perché è unico?). Si calcoli $\|L\|$; come converrà scegliere i punti di interpolazione?

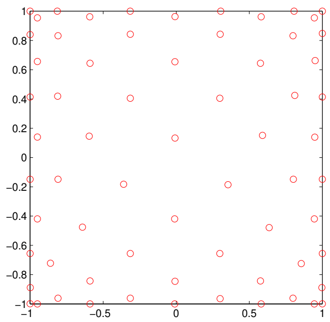
7. (F) abbiamo visto che per la qualità dell'interpolazione è importante che $\|L\|$ non cresca troppo rapidamente al crescere della dimensione del sottospazio, e questo dipende dalla scelta dei punti di interpolazione. Una buona scelta è data dai *punti di Fekete*, ovvero punti che massimizzano $|det(V)|$ su K^N (perché esistono sempre tali punti?) I punti di Fekete per l'interpolazione polinomiale sono noti teoricamente solo in due casi univariati (intervallo reale e circonferenza complessa), in generale vanno calcolati risolvendo numericamente un difficile problema di ottimizzazione. Si dimostri che utilizzando i punti di Fekete vale la sovrastima $\|L\| \leq N$.

   In figura $N = 66$ punti di Fekete per l'interpolazione polinomiale bivariata di grado $n = 10$ su un cerchio e un quadrato, approssimati con un metodo di ottimizzazione numerica vincolata in $2N = 132$ variabili (si noti che i punti non sono distribuiti uniformemente ma si infittiscono al bordo del dominio; in questo esempio si ha $\|L\| \approx 7.62$ per il cerchio e $\|L\| \approx 5.32$ per il quadrato).

6.3 Polinomi ortogonali

1. (!) polinomi ortogonali in (a, b) (dove eventualmente $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$) rispetto ad una misura $d\mu = w(x)dx$ con $w \in L^1_+(a, b)$ (cioè quasi ovunque non negativa e integrabile in (a, b); nel caso di intervalli non limitati si deve anche chiedere $x^j w(x) \in L^1(a, b)$ per ogni $j \geq 0$): si ortogonalizza la base canonica $\{x^j\}_{j\geq 0}$ con il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto





scalare $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ (definito in generale in $L^2_w(a,b) = \{f : \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty\}$), ottenendo una base ortogonale $\{\phi_j\}_{j\geq 0}$.

(!) *osservazione importante*: per come agisce il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si ha che $\langle \phi_0, \dots, \phi_n \rangle = \langle 1, \dots, x^n \rangle = \mathbb{P}_n$ e di conseguenza ϕ_n *è ortogonale a qualsiasi polinomio di grado* $< n$.

2. *relazione di ricorrenza*: si può dimostrare (NR) che ogni famiglia di polinomi ortogonali soddisfa una relazione di ricorrenza a tre termini del tipo

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n(x - \beta_n)\phi_n(x) + \gamma_n \phi_{n-1}(x) \;, \quad n \geq 0$$

con opportuni coefficienti α_n, β_n, γ_n, dove $\phi_{-1} \equiv 0$ e $\phi_0 \equiv 1$.

3. (!) *teorema sugli zeri dei polinomi ortogonali*: si consideri una misura $d\mu = w(x)dx$ con funzione peso w non negativa, continua e integrabile in (a,b): gli zeri dei corrispondenti polinomi ortogonali sono tutti reali, semplici e contenuti nell'intervallo aperto (a,b).

(sugg. $(*)$: se uno zero ξ di ϕ_n non stesse in (a,b), allora se reale $\phi_n(x) = (x-\xi)q(x)$, se complesso $\phi_n(x) = (x-\xi)(x-\overline{\xi})q(x)$, in ogni caso il polinomio $\phi_n(x)q(x)$ sarebbe sempre non negativo o non positivo in (a,b) ...). Si osservi che il teorema resta valido se la funzione peso è (quasi ovunque) non negativa e integrabile in (a,b), e positiva su un sottoinsieme di misura positiva.

4. alcune famiglie classiche di polinomi ortogonali:

   - Jacobi: $(a,b) = (-1,1)$, $w(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$; casi particolari notevoli i *polinomi di Chebyshev* $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ per $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ($\alpha = \beta = -1/2$) e i *polinomi di Legendre* per $w(x) \equiv 1$ ($\alpha = \beta = 0$)
   - Laguerre: $(a,b) = (0, +\infty)$, $w(x) = e^{-x}$
   - Hermite: $(a,b) = (-\infty, +\infty)$, $w(x) = e^{-x^2}$

5. i polinomi di Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$, $t \in [-1,1]$, soddisfano la relazione di ricorrenza $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$ (come si vede direttamente tramite note identità trigonometriche). Inoltre si può dimostrare (NR) che

godono dell'importante *proprietà min-max* : $2^{1-n}T_n(t)$ è il polinomio monico (coeff. direttore = 1) di grado n con la minima norma infinito ($= 2^{1-n}$) su $[-1,1]$. Si mostri utilizzando tale proprietà che interpolando sugli zeri di $T_{n+1}((2x-b-a)/(b-a))$ si minimizza la norma infinito del fattore polinomiale nella formula dell'errore $f(x) - L_n f(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ per $f \in C^{n+1}[a,b]$, e si ha la stima

$$\|f - L_n f\|_\infty \leq 2\,\frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

6.4 Quadratura

1. una formula di quadratura su $n+1$ punti distinti $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ è una somma pesata di valori della funzione integranda

$$\varphi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \varphi(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx\ ,\quad w \in L^1(a,b)$$

in cui in punti $\{x_j\} = \{x_j^{(n)}\}$ sono detti *nodi di quadratura* e i coefficienti $\{w_j\} = \{w_j^{(n)}\}$ *pesi di quadratura*; si dimostri che φ, $\varphi_n : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ sono funzionali lineari e continui, e vale

$$\|\varphi\| = \sup_{f\neq 0}\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = \|w\|_1 = \int_a^b |w(x)|dx\ ,\quad \|\varphi_n\| = \sum_{j=0}^{n}|w_j|$$

(sugg.: le disuguaglianze $\leq$ sono immediate; per dimostrare l'uguaglianza, nel secondo caso si prenda f continua tale che $f(x_j) = sgn(x_j)$, ...).

2. una formula di quadratura si dice *algebrica* (o anche interpolatoria) se è esatta (cioè il risultato della formula coincide con l'integrale) sui polinomi di $\mathbb{P}_n$: si dimostri che una formula è algebrica se e solo se $w_j = \int_a^b \ell_j(x)w(x)dx$. Il massimo $m_n \geq n$ tale che una formula algebrica è esatta su $\mathbb{P}_{m_n}$ si dice *grado di esattezza* della formula (si può dimostrare che $m_n \leq 2n+1$ (NR)). (F) Si verifichi anche che per una formula algebrica $\|\varphi_n\| \leq \|w\|_1\Lambda_n$ (dove Λ_n è la costante di Lebesgue dei punti di interpolazione/quadratura).

3. una formula di quadratura si dice *composta* (di grado s) se è ottenuta integrando un'interpolante polinomiale a tratti di grado s sui nodi (dove $x_0 = a$ e $x_n = b$) per n multiplo di s: si dimostri che le formule composte hanno effettivamente la forma di somme pesate descritte sopra (e sono esatte su $\mathbb{P}_s$). Chi sono i pesi della formula composta dei trapezi ($s = 1$) e delle parabole ($s = 2$) nel caso di passo costante $h = (b-a)/n$ e $w(x) \equiv 1$?

4. (!) *formule gaussiane*: le formule algebriche corrispondenti agli zeri del polinomio ortogonale ϕ_{n+1} di grado $n+1$ rispetto a $d\mu = w(x)dx$ con w positiva, continua e integrabile, si chiamano formule gaussiane; tali formule sono *esatte*

su $\mathbb{P}_{2n+1}$ ed hanno *pesi positivi*.
(sugg. $(*)$: per l'esattezza si osservi che dato $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ di grado maggiore di n, si ha $p = \phi_{n+1}q + r$, dove q ed r hanno grado minore di $n + 1$, e utilizzando l'ortogonalità e il teorema sugli zeri dei polinomi ortogonali ...; per la positività basta osservare che la formula è esatta su $\ell_j^2(x)$, ...)

5. una caratteristica delle formule gaussiane è quella di isolare certe singolarità di una funzione integranda nella funzione peso e quindi nei pesi di quadratura, integrando in tal modo una funzione molto più regolare (si pensi ad esempio alle formule di Gauss-Jacobi nel caso di singolarità agli estremi di tipo potenza frazionaria).

6. una formula di quadratura si dice *convergente* su una fissata funzione f se $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$ e convergente su un dato sottospazio se converge su ogni fissata funzione del sottospazio (nel linguaggio dell'analisi funzionale si tratta della convergenza puntuale della successione di funzionali). Si dimostri che le formule algebriche sono convergenti se la corrispondente interpolazione polinomiale converge uniformemente, e che le formule composte di grado s sono convergenti su $C^{s+1}[a, b]$ purché $\max \Delta x_j \to 0$, $n \to \infty$.

7. (F) la formula algebrica per $w(x) \equiv 1$ costruita sui punti di Chebyshev-Lobatto, detta di Clenshaw-Curtis, converge su $C^s[a, b]$, $s > 0$ (ed ha pesi positivi (NR)); allo stesso modo si comporta la formula algebrica per $w(x) \equiv 1$ costruita sui punti di Chebyshev classici, cioè gli zeri di $T_{n+1}((2x - b - a)/(b - a))$, detta formula di Fejér (da non confondersi con la formula gaussiana sugli stessi nodi, detta di Gauss-Chebyshev, che corrisponde a $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$).

8. (!) *teorema di Polya-Steklov* (risultato fondamentale sulla quadratura): una formula di quadratura converge su $C[a, b]$ se e solo se

   (i) converge su $\mathbb{P}$

   (ii) $\exists K > 0$ tale che $\sum_{j=0}^{n} |w_j| \leq K \ \forall n$

   (sugg. $(*)$: la necessità di (ii) viene dal t. di Banach-Steinhaus (NR): una successioni di funzionali lineari e continui su uno spazio normato completo è limitata in norma se e solo se è limitata puntualmente; per la sufficienza di (i) e (ii), si cominci a far vedere che per il t. di densità di Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_\varepsilon \in \mathbb{P}$ tale che $|\varphi(f) - \varphi_n(f)| \leq (\|\varphi_n)\| + \|\varphi\|)\varepsilon + |\varphi(p_\varepsilon) - \varphi_n(p_\varepsilon)|$, ...).

9. (!) *corollari*: una formula algebrica è convergente su $C[a, b]$ se e solo se la somma dei moduli dei pesi è limitata; una formula a *pesi positivi* è convergente su $C[a, b]$ se e solo se è convergente su $\mathbb{P}$ (quest'ultimo garantisce ad esempio che le formule gaussiane, dei trapezi, delle parabole, di Clenshaw-Curtis sono convergenti su $C[a, b]$); le formule di Newton-Cotes, che sono le formule algebriche su nodi equispaziati, non sono convergenti su $C[a, b]$, si può infatti far vedere (NR) che la somma dei moduli dei corrispondenti pesi non è limitata. Pensare ad un esempio di funzione su cui le formule di Newton-Cotes sono convergenti (sugg.:

esistono casi di convergenza uniforme dell'interpolazione polinomiale su nodi equispaziati?)

10. si controlli che l'ipotesi (*ii*) del t. di Polya-Steklov garantisce la *stabilità* della formula di quadratura, studiando l'effetto di errori sui valori della funzione integranda. Di conseguenza le formule convergenti su $C[a,b]$ sono anche stabili, mentre le formule di Newton-Cotes sono instabili (per rendere rigorosa quest'ultima affermazione, si consideri la formula perturbata da errori nel campionamento di f, $\tilde{f}(x_j) = f(x_j) + \varepsilon_j$ con $\varepsilon_j = \varepsilon\, sgn(w_j)$, ...).

11. (F$*$) generalizzazione: una formula di quadratura a pesi positivi convergente sui polinomi converge sulle funzioni continue a tratti in $[a,b]$, e nel caso di $w(x) \equiv 1$ sulle funzioni Riemann-integrabili in $[a,b]$.
(sugg.: siccome f ha un numero finito di punti di discontinuità, $\forall \varepsilon > 0$ si possono trovare due funzioni continue $f_1 \leq f \leq f_2$ tali che $\varphi(f_2 - f_1) \leq \varepsilon$, allora detto $e_n = \varphi_n - \varphi$ il funzionale errore si ha $e_n(f_1) - \varepsilon \leq \varphi_n(f_1) - \varphi(f_2) \leq e_n(f) \leq$ ... ; per le funzioni Riemann-integrabili si ricorra alle funzioni a gradino).

12. (!) *teorema di Stieltjes* (sulla velocità di convergenza delle formule algebriche): per una formula algebrica con grado di esattezza m_n che soddisfi l'ipotesi (*ii*) del t. di Polya-Steklov vale la seguente stima dell'errore di quadratura

$$|\varphi(f) - \varphi_n(f)| \leq (K + \|w\|_1) E_{m_n}(f)$$

(sugg.: si utilizzi il polinomio $p^*_{m_n}$ di migliore approssimazione uniforme per f in $\mathbb{P}_{m_n}$). Questa stima mostra che l'errore delle formule gaussiane è $\mathcal{O}(E_{2n+1})$.

13. si può ottenere una formula di quadratura su qualsiasi intervallo $[a,b]$ con funzione peso $w(x)$, utilizzando una formula di quadratura su $[-1,1]$ con funzione peso $w(\sigma(t))$, $x = \sigma(t) = (b-a)t/2 + (b+a)/2$; detti $\{t_j\}$ e $\{w_j\}$ i nodi e pesi per $w(\sigma(t))$, avremo nodi $x_j = \sigma(t_j)$ e pesi $(b-a)w_j/2$ (sugg.: tramite il cambio di variabile $x = \sigma(t)$ l'integrale diventa ...). Cosa si può dire del grado di esattezza di questa formula?

14. i pesi di una formula algebrica (dati i nodi), $\omega = (w_0, \ldots, w_n)^t$, possono essere calcolati risolvendo il sistema lineare

$$V^t \omega = m \ , \quad m = (m_0, \ldots, m_n)^t \ ,$$

dove gli $m_j = \int_a^b \phi_j(x)\, w(x)\, dx$ sono i "momenti" di una base polinomiale $\{\phi_j\}$ e $V^t = \{\phi_i(x_j)\}$ è la trasposta della matrice di Vandermonde in quella base (sugg.: la formula è esatta su ogni $p \in \mathbb{P}_n$ se e solo se è esatta su tutti gli elementi di una base, ...). Si controlli che se la base è ortonormale rispetto a $d\mu = w(x)\, dx$ allora $m_j = 0$, $j > 0$, $m_0 = \sqrt{\|w\|_1}$. (F) Si calcolino i momenti della base di Chebyshev su $[-1,1]$ per $d\mu = dx$ (da cui si possono ricavare i pesi delle formule di Clenshaw-Curtis e di Fejér visto che la matrice di Vandermonde nella base di Chebyshev risulta molto meglio condizionata della matrice di Vandermonde nella base monomiale canonica).

15. (F) cubatura (formule prodotto): qual'è la struttura delle formule di integrazione numerica di una funzione di due variabili ottenute integrando un'interpolante polinomiale tensoriale (si veda l'ultimo esercizio sull'interpolazione) su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$? come converrà scegliere i nodi $\{x_i\} \times \{y_j\}$?