Université Lille 1, Sciences et Technologies
Laboratoire Paul Painlevé - UMR 8524
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex - France

Progetto di tesi di laurea specialistica

Metodo gauge per il problema di Navier Stokes incompressible

Relatore : Caterina Calgaro, Maître de Conférence

Sia Ω un aperto, limitato di $\mathbb{R}^2$ di normale esterna unitaria n et di vettore tangente τ. Si considera il problema non lineare di Navier Stokes incompressibile :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trovare la velocità } u=(u_1,u_2) \text{ e la pressione } p \text{ tali che} & \\ -\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{Re}\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u = g & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x) & \forall x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

Per semplificare il problema, i lavori recenti di E et LIU (e coautori) propongono di rimpiazzare la pressione, variabile fisica, per una variabile non fisica ϕ, detta gauge. Allo stesso tempo, la velocità, sarà rimpiazzata da una variabile ausiliare $a = u - \nabla\phi$. Le equazioni di Navier Stokes si riscrivono :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trovare la variabile } a=(a_1,a_2) \text{ e la gauge } \phi \text{ tali che} & \\ -\dfrac{\partial a}{\partial t} - \dfrac{1}{Re}\Delta a + u\cdot\nabla u = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ -\Delta\phi = \nabla\cdot a & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ \phi = 0, \qquad a\cdot n = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}, \qquad a\cdot\tau = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x) & \forall x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{2}$$

Considerando una discretizzazione temporale di ordine uno, ad ongi passo temporale $t_n = n\delta t$ si devono risolvere le equazioni seguenti :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{a^{n+1}-a^n}{\delta t} + u^n\cdot\nabla u^n = \dfrac{1}{Re}\Delta a^{n+1} & \text{in } \Omega, \\ a^{n+1}\cdot n = \dfrac{\partial\phi^n}{\partial n}, \qquad a^n\cdot\tau = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3}$$

poi si determina il valore ϕ^{n+1} grazie a :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta\phi^{n+1} = \nabla\cdot a^{n+1} & \text{in } \Omega, \\ \phi^{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

Allora, la velocità sarà $u^{n+1} = a^{n+1} + \nabla\phi^{n+1}$ e la pressione p potrà essere dedotta dalla formula seguente :

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{Re}\Delta\phi = -p.$$

Il lavoro di tesi consisterà nello studio della bibliografia relativa al problema di Navier Stokes incompressibile e di quella relativa al metodo gauge introdotto nei lavori di E et Liu [1]-[2]. Una parte della bibliografia sarà fornita e dovrà essere completata da una ricerca bibliografica del/della candidato/a. Dopo uno studio accurato del metodo (risultati di convergenza e stabilità), il metodo sarà implementato, via matlab, per dei problemi bidimensionali discretizzati agli elementi finiti (test della cavità, dello scalino, dell'ostacolo, ecc. [3])

Références

[1] Wang, Chen and Liu, Jian Guo, Convergence of gauge method for incompressible flow, Math. of Comp. (2000), Vol. 69, N. 232, 1385–1407.

[2] E, Weinan and Liu, Jian Guo, Gauge method for viscous incompressible flows, Comm. Math. Sci. (2003), Vol. 1, N. 2, 317–332.

[3] C. Calgaro, E. Creusé, T. Goudon, An hybrid finite volume - finite element method for variable density incompressible flows, J. Comput. Physics 227, (2008), 4671–4696.