

Utilizzo del Prediction Error Method (PEM) nella stima della corrosione mediante indagine termografica

8 giugno 2009

1 Presentazione del problema

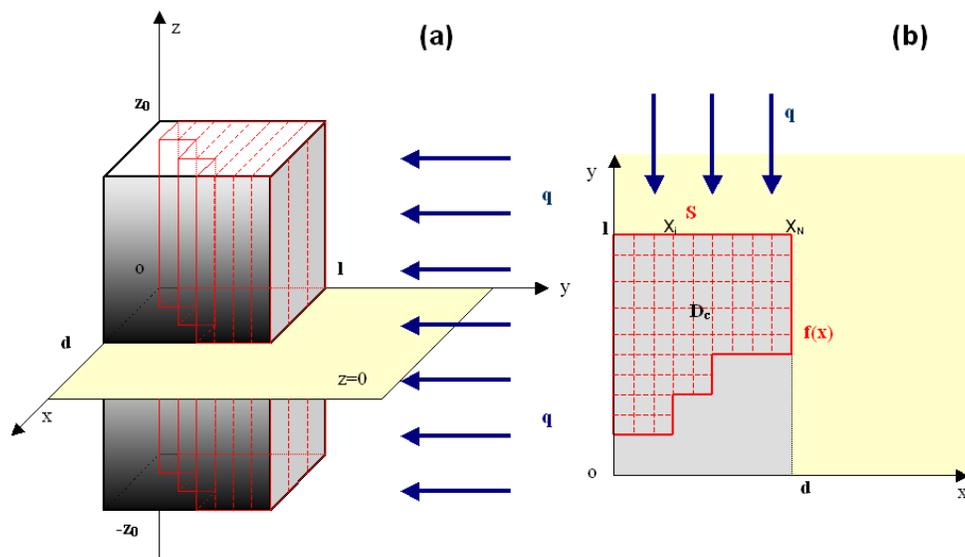


Figura 1: (a) La lamina di metallo (in grigio) e la stessa corrosa (in rosso), assorbono il calore q ; (b) Riduzione del problema in dimensione due, considerando la sezione della lamina sul piano $z = 0$.

Come raffigurato nell'immagine 1 (a), si consideri una lamina di metallo di materiale e dimensioni $l, d, 2z_0$ noti. Supponendo di conoscere la morfologia della faccia S della sbarra, indicata dalle frecce blu in figura 1 (a),

si vuole ricostruire il profilo di corrosione che si sviluppa a partire dalla faccia opposta verso l'interno del materiale e che si assume essere *incognito*, mediante lo studio dell'evoluzione della temperatura all'interno della lamina: questo tipo di analisi è detta *non distruttiva*. Quindi nell'istante t_0 si colpisce con un impulso di calore la faccia S , dove sono posti dei sensori termici. Dopo aver atteso un intervallo di tempo Δt si misurano le temperature sperimentali su S , che vengono utilizzate per ricostruire la struttura della faccia incognita. Supponendo che la superficie della lamina, ad esclusione di S , sia isolata, ossia *supponendo di essere in condizioni adiabatiche*, l'evoluzione della temperatura nella lamina viene modellata attraverso l'equazione del calore, ponendo come condizioni iniziali la temperatura in t_0 della stessa e come condizioni al contorno su S la quantità di calore assorbita \mathbf{q} dal flash. Si osservi che applicare l'equazione del calore equivale a ricostruire l'evoluzione della temperatura su un dominio, noto quest'ultimo. Il nostro problema quindi è opposto: date le temperature su S vogliamo capire quale sia il dominio ottimale sul quale deve agire l'equazione del calore per produrre delle temperature stimate che approssimino bene i dati raccolti. L'idea quindi è formulare un *problema inverso* della forma

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(f) + \mathbf{e}, \quad (1)$$

dove f è il profilo di corrosione incognito e definisce quindi il dominio, \mathbf{t} sono le temperature sperimentali su S e $\mathbf{t}(f)$ sono quelle ricostruite (per esempio utilizzando un modello numerico agli *elementi finiti (FEM)* oppure alle *differenze finite (FD)*) discretizzando numericamente dell'equazione del calore sul dominio individuato da f . Osserviamo che $\mathbf{t} - \mathbf{t}(f)$ rappresenta il residuo del modello, cioè la parte che *non* si riesce a modellare: pertanto viene inserito un errore additivo \mathbf{e} .

Il problema da risolvere dunque assume la forma seguente: trovare f^* tale che

$$f^* = \arg \min_f \|\mathbf{t} - \mathbf{t}(f)\|_2^2, \quad (2)$$

che equivale a determinare un profilo di corrosione in modo che il modello numerico approssimi al meglio le temperature sperimentali.

E' possibile semplificare ulteriormente il problema: supponendo che l'altezza della lamina z_0 sia sufficientemente piccola, la corrosione, illustrata in rosso in figura, può essere considerata costante lungo z . Con questa ipotesi possiamo limitarci ad analizzare il problema bidimensionale, come illustrato in figura 1 (b). Studiamo quindi l'equazione del calore con dominio incognito D_c .

Il problema da risolvere quindi si riduce a questo: capire come meglio scegliere il profilo f , affinché la temperatura in $t_f := t_0 + \Delta t$ su S , ricostruita attraverso l'equazione del calore e con dominio D_c , approssimi al meglio i dati sperimentali \mathbf{t} raccolti.

2 Costruzione del modello matematico

Si consideri la figura 1 (b). Siamo $\{x_1, \dots, x_N\}$ i punti di in cui sono posizionati gli N sensori di S ; definiamo quindi l'insieme

$$\mathfrak{F} = \{f \text{ t.c. } f : [0, d] \longrightarrow [0, l], f \text{ costante a tratti su } \{x_1, \dots, x_N\}\},$$

limitandoci dunque a considerare un profilo di corrosione costante a tratti: quest'ipotesi è motivata dal fatto che, risolvendo numericamente il problema, andiamo a costruire una *media locale* del fronte di corrosione, nell'intorno di ogni punto della faccia incognita. Inoltre $\{x_1, \dots, x_N\}$ rappresenta la massima quantità di informazione che riusciamo a ricostruire (cioè la suddivisione più fine), poichè corrisponde esattamente agli N sensori termici. Sia $f \in \mathfrak{F}$, definiamo $D_c = [0, d] \times [0, l] / \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, area tratteggiata in figura 1(b).

Il problema dunque è ricercare all'interno di \mathfrak{F} , che rappresenta l'insieme dei possibili profili di corrosione, la funzione f tale che la temperatura sul segmento noto S , in t_f , costruita attraverso l'equazione del calore sul dominio D_c , sia approssimativamente uguale ai dati sperimentali.

Il modello matematico che regola l'evoluzione della temperatura $T = T(t, x, y)$ è il seguente:

$$\rho C \frac{\partial}{\partial t} T = \mathbf{r} + k \Delta T$$

dove ρC rappresenta la capacità termica del materiale di cui è composta la lamina (C è il calore specifico), \mathbf{r} rappresenta il calore assorbito dalle sorgenti di calore interne al dominio e k è il coefficiente di conducibilità termica del materiale che costituisce la lamina.

Supponiamo di conoscere ρC e k e assumiamo noto $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Ponendo $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{e} = 0$ e indicando con \mathbf{n}_S la normale esterna ad S e con \mathbf{n} la normale esterna a $\delta D_c/S$, l'equazione diventa:

$$\begin{cases} \rho C \frac{\partial}{\partial t} T = k \Delta T \\ k \nabla T \cdot \mathbf{n}_S = q(t) \\ k \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ su } \delta D_c/S \\ T(t_0, x, y) = T_0(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Essendo f costante a tratti su $\{x_1, \dots, x_N\}$, possiamo porre $f = f_\vartheta$, dove ϑ è un opportuno vettore di parametri tale che ϑ_i corrisponde alla *profondità della corrosione in quell'intervallo*, ossia $\vartheta_i := f(x_i)$, con $i = 1, \dots, N - 1$.

2.1 Esercitazione

Andiamo a risolvere il problema in due fasi: dapprima consideriamo la formulazione 1D dello stesso, più semplice dal punto di vista computazionale. In seguito analizzeremo il modello 2D.

2.1.1 Modello 1D

Il primo passo consiste nella riduzione al caso 1D del modello matematico (3). Supponiamo per esempio che d sia molto piccolo, riducendoci quindi a considerare l'evoluzione del calore in una sbarra metallica, infinitamente sottile, considerando solo la dimensione della lunghezza (figura 2 (c)).

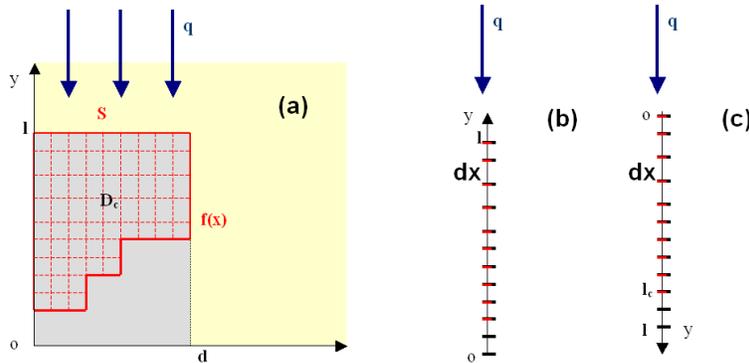


Figura 2: (a) Situazione 2D; (b) Riduzione del problema in dimensione uno, (c) cambio del sistema di riferimento per descrivere la corrosione longitudinale.

Consideriamo quindi $(t, x) \in [t_0, t_f] \times [0, l]$ e, ponendo per semplicità $\frac{k}{\rho C} = c$, otteniamo il modello 1D:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T = c \Delta T \\ \frac{\partial}{\partial x} T(t, 0) = q(t) \\ \frac{\partial}{\partial x} T(t, l_c) = 0, \\ T(t_0, x) = g_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

dove $l_c \in [0, l]$ è tale che $[0, l_c]$ rappresenta il dominio corrosivo.

Sia h il passo uniforme di discretizzazione temporale di $[t_0, t_f]$ e dx il passo di $[0, l]$.

Discretizziamo dapprima l'equazione del calore nello spazio, usando le *differenze finite (FD)*. Poniamo $T_i(t) = T(t, x_i)$, dove $x_i = idx$, $i = 0, \dots, n$: usando queste notazioni, n è il numero di nodi in $[0, l_c]$, ossia è il parametro da determinare, poichè identifica la profondità della corrosione. Ci riconduciamo alla seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(t) = cA\mathbf{T}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{T}(t_0) = (g_0(x_0), \dots, g_0(x_n))^T. \end{cases} \quad (5)$$

dove $\mathbf{T}(t) = (T_0(t), \dots, T_n(t))$, $\mathbf{b}(t) = (q(t), 0, \dots, 0)^T$ e $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{dx} & \frac{1}{dx} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{dx^2} & \frac{-2}{dx^2} & \frac{1}{dx^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{dx^2} & \frac{-2}{dx^2} & \frac{1}{dx^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{dx} & \frac{-1}{dx} \end{pmatrix},$$

dove le righe interne consistono nella discretizzazione del laplaciano ($\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x_i) \approx \frac{T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)}{h^2}$, $i = 2, \dots, n$), la prima riga corrisponde alla condizione di Neumann $\frac{\partial}{\partial x} T(t, 0) \approx \frac{T_1(t) - T_0(t)}{dx} = q(t)$ e l'ultima a $\frac{\partial}{\partial x} T(t, l_c) \approx \frac{T_n(t) - T_{n-1}(t)}{-dx} = 0$.

Poichè siamo interessati alla serie storica delle temperature nel nodo x_0 , che corrisponde alla faccia nota S nel caso 2D, possiamo riscrivere il problema attraverso il seguente sistema *state space continuo* di ordine $nx = n + 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(t) = cA\mathbf{T}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{T}(t), \end{cases} \quad (6)$$

dove $C = [1, 0, \dots, 0]$ e $\mathbf{b}(t)$ rappresenta l'input del nostro sistema.

Osserviamo che $\mathbf{b}(t) = [q(t), 0, \dots, 0]$, input del sistema può essere riscritto $\mathbf{b}(t) = Bq(t)$, $B = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, notazione che meglio descrive la situazione fisica, in quanto il flusso di calore interessa direttamente solo il nodo x_0 .

La discretizzazione nel tempo avviene applicando un metodo di Eulero, a partire da $\mathbf{T}(0) = (g_0(x_0), \dots, g_0(x_n))^T$:

- *Eulero esplicito (EE)*:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(k+1) = (I + hcA)\mathbf{T}(k) + h\mathbf{b}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = C\mathbf{T}(k+1), \end{cases} \quad (7)$$

$$k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{t_f - t_0}{h} \right\rfloor;$$

- *Eulero implicito (EI)*:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(k+1) = (\mathbb{I}_{n+1} - hcA)^{-1} \mathbf{T}(k) + (\mathbb{I}_{n+1} - hcA)^{-1} h \mathbf{b}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) = C \mathbf{T}(k+1), \end{cases} \quad (8)$$

$$k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{t_f - t_0}{h} \right\rfloor.$$

Una volta costruito il modello numerico che descrive il problema diretto 1D, lo utilizziamo per risolvere il problema inverso che consiste nella determinazione del parametro n che identifica la corrosione (*analisi_calore_1D_fd.m*).

1. *Generazione dei dati sperimentali*: essi vengono costruiti attraverso il modello numerico 1D, usando come forzante $q(t)$ un flash termico, sia per il dominio non corrosivo (*T_vero_x0.mat*), sia per il dominio corrosivo (*T_vero_x0_corr.mat*), aggiungendo alla serie storica ottenuta una componente stocastica che rappresenta il rumore nei dati.
2. *Validazione del modello di riferimento*: determinazione del passo di discretizzazione dx di $[0, l]$, cioè del numero di nodi $n + 1$ del dominio spaziale *non corrosivo*, tale che la serie storica delle temperature registrate sul nodo x_0 approssimi le temperature sperimentali *T_vero_x0.mat*. Scegliere n in base ad una collezione di dati sperimentali corrisponde alla determinazione dell'ordine del modello, da fare con l'analisi ai valori singolari ed ai criteri di parsimonia.
3. *Analisi della corrosione*: considerando le misure sperimentali *T_vero_x0_corr.mat*, si applica il *Prediction Error Method (PEM)* per cercare di minimizzare la norma dell'errore di predizione, ossia della differenza tra la serie storica delle temperature in x_0 e quelle ricostruite al variare di n . In questo caso particolare si può considerare in aggiunta il seguente approccio alternativo: il parametro stimato dal PEM è di fatto l'ordine del modello DLTI nello spazio degli stati che descrive l'andamento della temperatura, e quindi si può procedere alla stima della corrosione mediante analisi congiunta ai valori singolari e metodi di parsimonia, come fatto in fase di validazione con il modello sano; notare che si ha in questo caso una procedura finita e non soggetta a problemi di convergenza, che è invece un lato debole dell'approccio PEM.

2.1.2 Modello 2D

Accenniamo brevemente al caso 2D, in quanto numericamente più complesso. A differenza del modello 1D, il modello matematico (3) viene discretizzato numericamente utilizzando un modello FEM, mediante il quale è possibile costruire una *simulazione numerica* del flusso di calore \mathbf{q} e delle temperature sperimentali su S ; queste ultime (*data.T_vero*) rappresentano quindi la quantità che si vuole ricostruire \mathbf{t} . In questo si costruisce una *simulazione dei dati sperimentali* relativamente sia al dominio del *campione sano* (che corrisponde a un profilo di corrosione nullo, i.e. $\vartheta=\mathbf{0}$) sia a quello del campione corrosivo (che vogliamo ricostruire).

Il processo di stima della corrosione si articola in due fasi distinte.

- Dapprima si effettua la *validazione del modello di riferimento*, ossia si considerano il *campione sano* e le relative misure sperimentali, e si confrontano queste ultime con l'uscita del modello FEM su S , costruita applicando un *filtro di Kalman*, e quindi introducendo una componente stocastica nella formulazione del problema. Si creano in questo modo una mesh (cioè una discretizzazione del dominio geometrico) di riferimento e una *funzione di costo di riferimento* (*validazione_riferimento.Vn*): quest'ultima è molto importante perchè è una misura della bontà del modello FEM e rappresenta il massimo grado di precisione che possiamo attenderci dalle stime della corrosione.
- *L'analisi della corrosione mediante termografie* consiste nell'applicare ad ogni nodo di S un metodo di Newton, il *Prediction Error Method (PEM)*, cercando di risolvere globalmente il seguente problema di ottimizzazione:

$$\vartheta^* = \arg \min_{\vartheta \in [0, l]^{N-1}} \|\mathbf{t} - \mathbf{t}(f_\vartheta)\|_2^2. \quad (9)$$

Quindi si varia ϑ , i.e. il profilo di corrosione, finchè la norma del residuo, i.e. $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}(f_\vartheta)\|_2$, diventa inferiore ad una certa soglia, che viene scelta maggiore o uguale alla funzione di costo di riferimento.

Osserviamo infine che, utilizzando un algoritmo iterativo, dovremo partire da una stima iniziale del vettore che rappresenta le profondità in ogni segmento della suddivisione, ϑ_0 , e poichè non sappiamo a priori se sia presente o meno una corrosione della lamina, assumiamo $\vartheta_0=\mathbf{0}$, ossia testiamo la presenza di corrosione.