

La termografia infrarossa e il problema termico inverso parte II *I modelli termici*

Dr. Sergio Marinetti

Consiglio Nazionale delle Ricerche - Istituto per le Tecnologie della Costruzione



Il problema termico diretto

- Il problema termico diretto consiste nel ricavare la distribuzione spazio-temporale della temperatura in un corpo a partire da:
 - Parametri termofisici del materiale
 - Geometria
 - Condizioni al contorno
 - Condizioni iniziali
- Per risolvere il problema termico diretto ci possiamo servire di diversi modelli che possiamo suddividere in tre categorie principali:
 - Modelli analitici
 - Modelli semi-analitici
 - Modelli numerici

Equazione della conduzione del calore (1)

- La distribuzione transitoria di temperatura all'interno di solidi anisotropi con sorgenti interne di calore è governata dall'equazione parabolica di conduzione del calore

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + w(x, y, z)$$

- $w(x, y, z)$: tasso di generazione di energia interna per unità di volume [W/m³]
- ρ : densità [kg/m³]
- C : calore specifico [J/(kg K)]
- λ_d : conduttività termica lungo d [W/(m K)]

Equazione della conduzione del calore (2)

- Nel caso di **solidi isotropi** dove $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ e in **assenza di sorgenti interne di calore**, l'equazione si scrive nella forma

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- $\alpha = \frac{\lambda}{C\rho}$ diffusività termica [m²/s]
- Equazione generalmente utilizzata per l'inversione nei test di termografia attiva

Proprietà termiche dei materiali

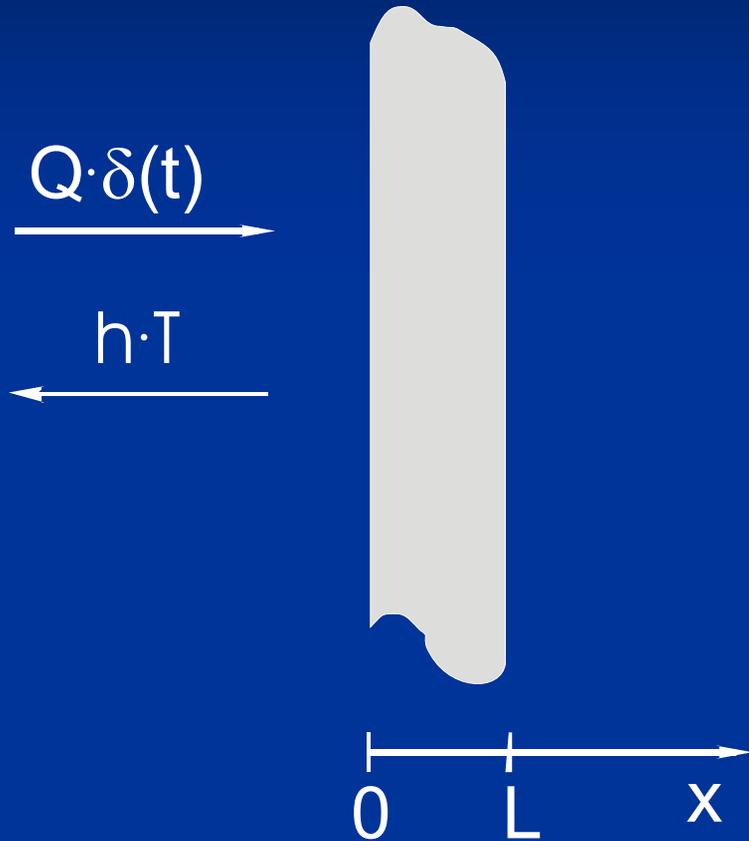
- Le proprietà termiche di base dei materiali sono la conduttività λ , il calore specifico C e la densità ρ
- La conduttività λ è la grandezza fondamentale in regime stazionario
- La diffusività α e l'effusività $e = \sqrt{\lambda C \rho}$ sono le grandezze dinamiche fondamentali per lo studio del regime transitorio
- La diffusività α è la misura della velocità di diffusione del calore all'interno del materiale
- L'effusività e è l'abilità del materiale ad aumentare la sua temperatura in risposta ad uno stimolo energetico (*inerzia termica*)

Caso studio

Consideriamo il seguente caso studio e analizziamo i vari tipi di approccio per la soluzione del problema termico diretto.

- Lastra piana omogenea di spessore L infinitamente estesa (problema 1D)
- una superficie viene sottoposta a riscaldamento radiante uniforme impulsivo (delta di Dirac)
→ condizioni al contorno di Neumann
- la superficie riscaldata scambia calore con l'ambiente mentre l'altra superficie viene considerata adiabatica
→ condizioni al contorno di Robin
- la temperatura iniziale della lastra piana è di 0 K

Soluzione analitica



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Condizione iniziale

$$T(x,0) = 0$$

Condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = Q \cdot \delta(t) - h \cdot T \\ -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

L'espressione

$$\left[A \cdot \sin\left(\frac{\mu \cdot x}{L}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\mu \cdot x}{L}\right) \right] \cdot e^{-\mu^2 \frac{\alpha \cdot t}{L^2}} \quad (1)$$

soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$$

Numero di Fourier (adimensionale)

Dalla prima condizione al contorno

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = Q \cdot \delta(t) - h \cdot T$$

che per ($t > 0$) diventa

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -h \cdot T$$

si ottiene

$$-\frac{\lambda \cdot A \cdot \mu}{L} = -h \cdot B$$

da cui

$$\frac{A}{B} = \frac{h \cdot L}{\lambda \cdot \mu} = \frac{Bi}{\mu} \quad (2)$$

Numero di Biot
(adimensionale)

Dalla seconda condizione al contorno

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \tan(\mu)$$

da cui dalla (2)

$$\boxed{\mu \cdot \tan(\mu) = Bi} \quad (3)$$

Si può dimostrare che le radici di questa equazione trascendente sono tutte reali.

Quindi raccogliendo la B dalla (1) e sostituendo A/B con (2) si ottiene

$$A' \cdot \left[\frac{Bi}{\mu} \cdot \sin\left(\frac{\mu \cdot x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\mu \cdot x}{L}\right) \right] \cdot e^{-\mu^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L^2}}$$

dove A' è una costante arbitraria e μ è una radice reale positiva dell'equazione trascendente (3). *Tale espressione soddisfa l'equazione e le condizioni al contorno per $t > 0$.*

Assumiamo ora che la soluzione al nostro problema possa essere rappresentata in forma di serie:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L^2}} \quad (4) \quad \text{dove} \quad X_n = \frac{Bi}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right)$$

Lemma: Le funzioni $A_n \cdot X_n \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \cdot t}{L^2}}$ sono ortogonali.

Dimostrazione: premesso che

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + \frac{\mu_n^2}{L^2} \cdot X_n = 0$$

calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} \frac{(\mu_n^2 - \mu_m^2)}{L^2} \int_0^L X_n \cdot X_m \cdot dx &= \int_0^L \left(\frac{\mu_n^2}{L^2} \cdot X_n \cdot X_m - \frac{\mu_m^2}{L^2} \cdot X_m \cdot X_n \right) \cdot dx \\ &= \int_0^L \left(-X_m \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} + X_n \cdot \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \cdot dx = X_n \cdot \frac{dX_m}{dx} - X_m \cdot \frac{dX_n}{dx} \Big|_0^L \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno si ricava

$$\frac{dX_r}{dx} = \begin{cases} \frac{h}{\lambda} \cdot X_r & x = 0 \\ 0 & x = L \end{cases}$$

da cui

$$X_n \cdot \frac{dX_m}{dx} - X_m \cdot \frac{dX_n}{dx} \Big|_0^L = 0 - \left[X_n \cdot \left(\frac{h}{\lambda} \right) \cdot X_m - X_m \cdot \left(\frac{h}{\lambda} \right) \cdot X_n \right] = 0$$

Infine

$$\langle X_n, X_m \rangle = \int_0^L X_n \cdot X_m \cdot dx = 0 \quad m \neq n \quad \text{c.v.d.}$$

Calcolo del prodotto interno $\langle X_n, X_n \rangle = \|X_n\|^2$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^L X_n^2 \cdot dx = \int_0^L \left(\frac{Bi}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) \right)^2 \cdot dx$$

$$= \int_0^L \left(\left(\frac{Bi}{\mu_n} \right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) + 2 \cdot \frac{Bi}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) \right) \cdot dx$$

Ricordando che

$$\int \cos^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin(x) \cdot \cos(x))$$

$$\int \sin^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (x - \sin(x) \cdot \cos(x)) \quad \dots\dots$$

$$\begin{aligned}
\|X_n\|^2 &= \frac{Bi^2 \cdot L}{2 \cdot \mu_n^3} \cdot [\mu_n - \sin(\mu_n) \cdot \cos(\mu_n)] + \\
&+ \frac{L}{2 \cdot \mu_n} \cdot [\mu_n + \sin(\mu_n) \cdot \cos(\mu_n)] + \\
&+ \frac{Bi \cdot L}{2 \cdot \mu_n^2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot \mu_n)]
\end{aligned}$$

Riepilogo:

- la soluzione cercata è espressa nella forma:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot X_n \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \cdot t}{L^2}}$$

- i coefficienti μ_n sono le radici reali positive dell'equazione:

$$\mu_n \cdot \tan(\mu_n) = Bi$$

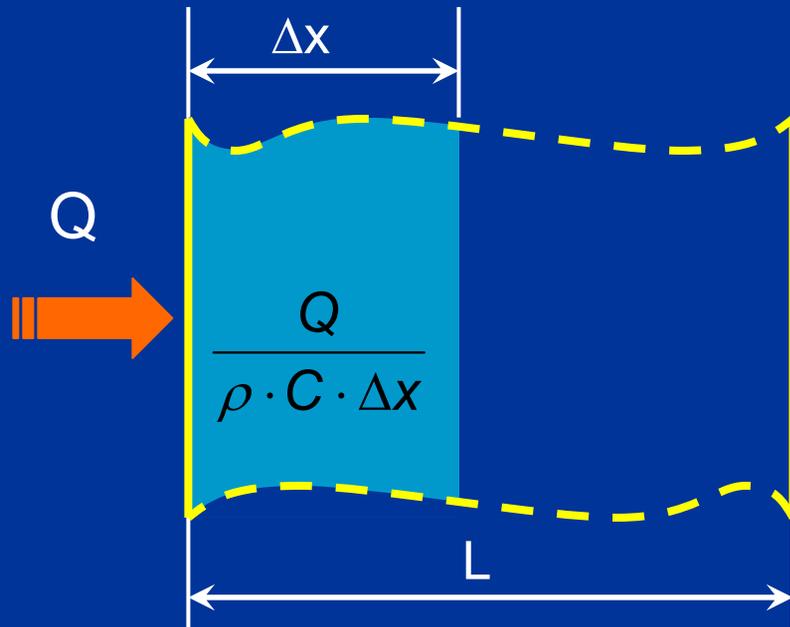
- le funzioni X_n che soddisfano le condizioni al contorno relative allo scambio termico sono:

$$X_n = \frac{Bi}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\mu_n \cdot x}{L}\right)$$

- rimangono da ricavare i coefficienti A_n

- dalla $T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \cdot t}{L^2}}$ per $t=0$ si ha $T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n$
- calcoliamo la proiezione di $T(x,0)$ su un sigolo X_n : $\langle T(x,0), X_n \rangle$

$$\langle T(x,0), X_n \rangle = \int_0^L \left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cdot X_i \right) \cdot X_n \cdot dx = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \cdot \int_0^L X_i \cdot X_n \cdot dx = A_n \cdot \|X_n\|^2$$



Aumento di temperatura dovuto all'assorbimento dell'energia Q nello strato di spessore Δx

$$T(x,0) = \begin{cases} \frac{Q}{\rho \cdot C \cdot \Delta x} & 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0 & \Delta x < x \leq L \end{cases}$$

$$\langle T(x,0), X_n \rangle = \int_0^{\Delta x} \frac{Q}{\rho \cdot C \cdot \Delta x} \cdot X_n \cdot dx =$$

$$= \frac{Q}{\rho \cdot C} \cdot \left[\frac{Bi}{\mu_n} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}\right)}{\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}} + \frac{\sin\left(\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}\right)}{\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}} \right]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{Q}{\rho \cdot C} \cdot \left[\frac{Bi}{\mu_n} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}\right)}{\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}} + \frac{\sin\left(\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}\right)}{\frac{\mu_n \cdot \Delta x}{L}} \right] = \frac{Q}{\rho \cdot C}$$

$\rightarrow 0$
 $\rightarrow 1$

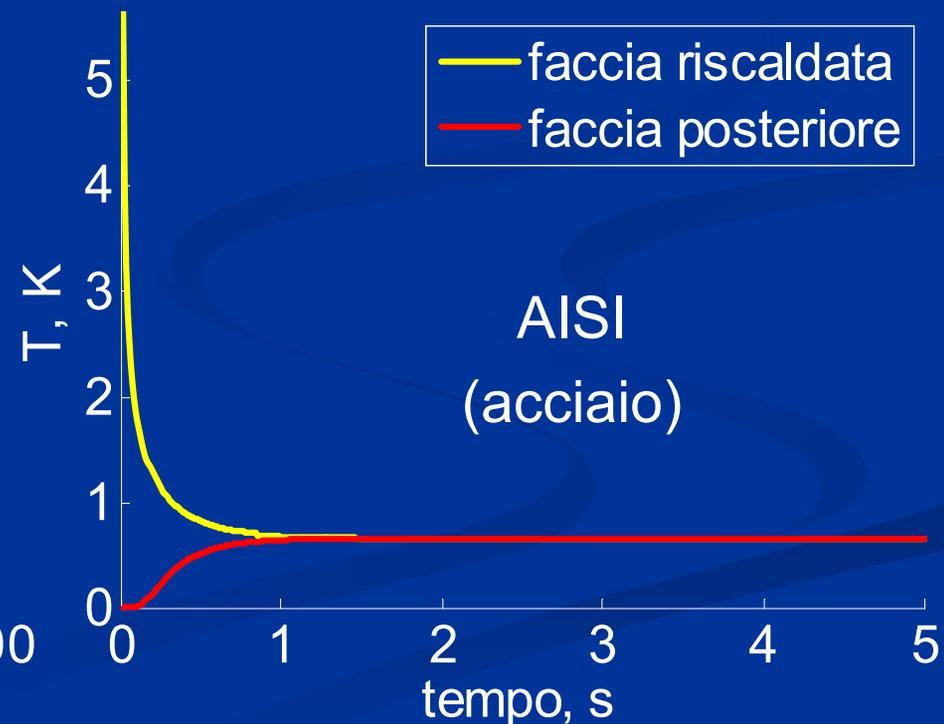
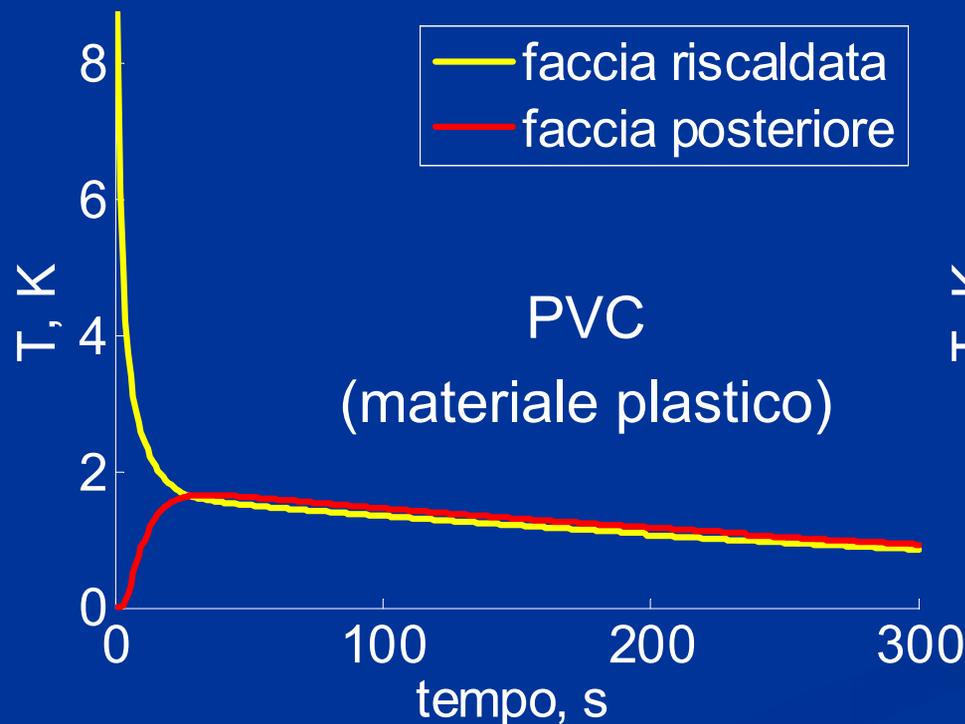
$$\langle T(x,0), X_n \rangle = \frac{Q}{\rho \cdot C} = A_n \cdot \|X_n\|^2$$



$$A_n = \frac{Q}{\rho \cdot C} \cdot \frac{1}{\|X_n\|^2}$$

Soluzione analitica dell'equazione di Fourier per una lastra piana di spessore L con riscaldamento impulsivo e scambio di calore tra la faccia riscaldata e l'ambiente

$$T(x,t) = \frac{Q}{\rho \cdot C} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{\|X_n\|^2} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L^2}}$$

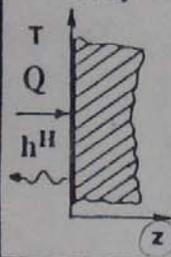
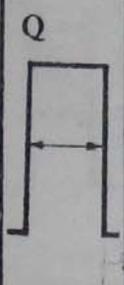


Some classic solutions to 1D heat transfer problems

	$h^H=0$	$\frac{T}{QL/K} = Fo + \frac{3(1-Z)^2-1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp(-n^2\pi^2 Fo) \cos[n\pi(1-Z)];$ $Fo = \alpha\tau / L^2; \quad Z = z/L$	7	$\frac{T}{QL/K} = Fo + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-n^2\pi^2 Fo)$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo);$ $\mu_n \text{ - positive roots of: } \mu \operatorname{tg} \mu = Bi; \quad Bi = hL/K$	8	$\frac{T}{Q/h} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo)$
	$h^H=0$	$\frac{T}{QL/K} = Fo_h + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} [e^{-n^2\pi^2 Fo} (e^{n^2\pi^2 Fo_h} - 1)] \times$ $\times \cos\left[\frac{n\pi}{L}(1-Z)\right]$	9	$\frac{T}{QL/K} = Fo_h + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [e^{-n^2\pi^2 Fo} (e^{n^2\pi^2 Fo_h} - 1)]$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \times$ $\times [\exp(\mu_n^2 Fo_h) - 1]$	10	$\frac{T}{Q/h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \times$ $\times [\exp(\mu_n^2 Fo_h) - 1]$
	$h^H=0$	$\frac{T}{W\alpha/KL} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi z \exp(-n^2 \pi^2 Fo)$	11	$\frac{T}{W\alpha/KL} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 Fo)$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{W\alpha/KL} = \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo)$	12	$\frac{T}{W\alpha/KL} = \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \times$ $\times \exp(-\mu_n^2 Fo)$

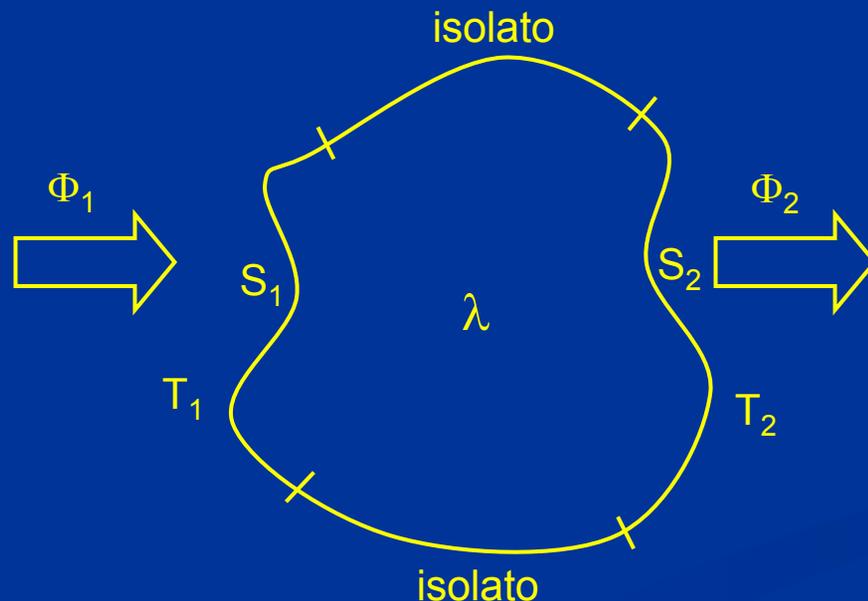
Note: ° See solution in [1]
 °° Solution derived from those for step-function
 $\operatorname{erfc}x = 1 - \operatorname{erf}x$; $\operatorname{erf}(0) = 0$; $\operatorname{erf}(\infty) = 1$; $\operatorname{erfc}(0) = 1$; $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$

Some classic solutions to 1D heat transfer problems

Specimen	Heating function	Convection on the heated surface	General solution	Number	Solution for heated surface (the function $\frac{T-K}{Q} _{z=0}$)
Semi-infinite body 	Q	$h^H=0$	<i>Temperature dimensionless</i> $\left(\frac{T}{Qz/K}\right) = 2 \sqrt{\frac{Fo_z}{\pi}} e^{-1/4Fo_z} \cdot \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z}}; \quad Fo_z = \alpha\tau/z^2$	1	$\frac{T}{Q/K} = 2\left(\frac{\alpha\tau}{\pi}\right)^{1/2}$
		$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} - e^{Bi_z + Bi_z^2 Fo_z} \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} + Bi_z \sqrt{Fo_z} \right); \quad Bi_z = hz/K$	2	$\frac{T}{Q/h} = 1 - e^{H^2 \alpha \tau} \text{erfc} (H\sqrt{\alpha\tau});$ $H = h/K$
	Q	$h^H=0$	$\frac{T}{Qz/K} = 2 \sqrt{\frac{Fo_z}{\pi}} e^{-1/4Fo_z} - 2 \sqrt{\frac{Fo_z Fo_{zh}}{\pi}} e^{-1/4(Fo_z + Fo_{zh})} \cdot \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} + \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z + Fo_{zh}}}; \quad Fo_h = \alpha\tau_h/L^2$	3	$\frac{T}{Q/K} = 2\left(\frac{\alpha\tau}{\pi}\right)^{1/2} - 2\left[\frac{\alpha(\tau-\tau_h)}{\pi}\right]^{1/2}$
		$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} \cdot \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{Fo_z + Fo_{zh}}} - e^{Bi_z + Bi_z^2 Fo_z} \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} + Bi_z \sqrt{Fo_z} \right) + Bi_z \sqrt{Fo_z} + e^{Bi_z + Bi_z^2 (Fo_z + Fo_{zh})} \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_z + Fo_{zh}}} + Bi_z \sqrt{Fo_z + Fo_{zh}} \right)$	4	$\frac{T}{Q/h} = e^{H^2 \alpha (\tau - \tau_h)} \text{erfc} [H\sqrt{\alpha(\tau - \tau_h)}] - e^{H^2 \alpha \tau} \text{erfc} (H\sqrt{\alpha\tau})$
	W	$h^H=0$	$\frac{T}{W\alpha/Kz} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo_z}} \exp(-1/4Fo_z)$	5	$\frac{T}{W} = \frac{1}{e \sqrt{\pi \tau}}; \quad e = \sqrt{K\rho C}$
		$h^H \neq 0$	$\frac{T}{W\alpha/Kz} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo_z}} e^{-1/4Fo_z} - Bi_z e^{Bi_z + Bi_z^2 Fo_z} \text{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_z}} + Bi_z \sqrt{Fo_z} \right)$	6	$\frac{T}{W} = \frac{1}{e \sqrt{\pi \tau}} - \frac{h}{e^2} [\exp(H^2 \alpha \tau)] \text{erfc} (H\sqrt{\alpha\tau})$

Il metodo dei quadrupoli

- Anzichè cercare la soluzione $T(x,y,z,t)$ nel dominio spazio-tempo, si cerca la soluzione in un dominio trasformato.
- Si utilizza la trasformata di Laplace rispetto alla variabile “tempo” e strumenti numerici di inversione
- Nella sua forma più semplice si basa su una matrice 2 x 2 che lega le trasformate della temperatura e del flusso su di una faccia alle stesse grandezze sull'altra faccia



Regime stazionario

$$T_1 - T_2 = R \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

Richiami sulla trasformata di Laplace

Definizione: sia f localmente sommabile su \mathbf{R}_0^+ ($f \in L_{loc}$), $p \in \mathbf{C}$, $K \in \mathbf{R}$. Per ogni $K \geq 0$ e per ogni p esiste finito l'integrale

$$g(p) = \int_0^K f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

Se l'integrale espresso come

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_0^K f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

è convergente in $p_0 \in \mathbf{C}$, la funzione f si dice *trasformabile secondo Laplace* e l'integrale (1) si dice *integrale di Laplace*.

Teorema: Sia f *trasformabile secondo Laplace* (*L-trasformabile*); se l'integrale (1) è convergente per $p_0 \in \mathbf{C}$, allora esso converge per tutti i valori $p \in \mathbf{C}$ tali che $\text{Re}[p] > \text{Re}[p_0]$.

Teorema: Se $f \in L_{loc}$ è *L-trasformabile*, la funzione $F(p)$ si dice *trasformata di Laplace*.

Proprietà della trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è un operatore lineare, cioè se f_1 e f_2 sono L -trasformabili, per $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ si ha

$$L[\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t)] = \alpha \cdot L[f_1(t)] + \beta \cdot L[f_2(t)]$$

Teorema: Se f è localmente assolutamente continua in \mathbf{R}_0^+ e se la derivata f' è L -trasformabile con ascissa di convergenza ρ_0^* , allora f è assolutamente L -trasformabile con ascissa di convergenza $\rho \leq \max[0, \rho_0^*]$, e per $\text{Re}[\rho] > \max[0, \rho_0^*]$ si ha

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \rho \cdot L[f(t)] - f(0)$$

Seconda formula fondamentale della trasformazione di Laplace

Caso 1D: lastra piana omogenea

Consideriamo l'equazione generale nel caso di una lastra piana omogenea di spessore L inizialmente a temperatura nulla

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & 0 < x < L \\ T = 0 & t = 0 \end{cases}$$

Eseguiamo la trasformata di Laplace di entrambi i membri e otteniamo la seguente equazione dove p è la variabile complessa e θ è la trasformata della temperatura T

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{p}{\alpha} \cdot \theta$$

Ricordando le definizioni delle funzioni trigonometriche iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

e delle relative derivate

$$\frac{d \sinh(x)}{dx} = \cosh(x) \quad \frac{d \cosh(x)}{dx} = \sinh(x)$$

si dimostra che la funzione

$$\theta(x, p) = K_1 \cdot \sinh(\beta \cdot x) + K_2 \cdot \cosh(\beta \cdot x) \quad \beta = \sqrt{\frac{p}{\alpha}}$$

è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{p}{\alpha} \cdot \theta$$

Il flusso per ogni coordinata x nella lastra piana si può scrivere nella forma

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

dove λ è la conduttività termica e S è una qualsiasi sezione parallela alle facce della lastra.

Calcolando la trasformata di Laplace e tenendo conto della soluzione $\theta(x,p)$

si ottiene $\theta(x,p) = K_1 \cdot \sinh(\beta \cdot x) + K_2 \cdot \cosh(\beta \cdot x)$

$$\phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\lambda \cdot S \cdot \beta \cdot (K_1 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + K_2 \cdot \sinh(\beta \cdot x))$$

Indichiamo con:

- Θ_{in} la trasformata della temperatura sulla faccia $x=0$
- Φ_{in} la trasformata del flusso sulla faccia $x=0$
- Θ_{out} la trasformata della temperatura sulla faccia $x=L$
- Φ_{out} la trasformata del flusso sulla faccia $x=L$

ed eliminiamo le costanti K_1 e K_2 dalle seguenti equazioni scritte per $x=0$ e $x=L$

$$\theta(x, p) = K_1 \cdot \sinh(\beta \cdot x) + K_2 \cdot \cosh(\beta \cdot x)$$

$$\phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\lambda \cdot S \cdot \beta \cdot (K_1 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + K_2 \cdot \sinh(\beta \cdot x))$$

ottenendo

$$\theta_{in} = \cosh(\beta \cdot L) \cdot \theta_{out} + \frac{\sinh(\beta \cdot L)}{\lambda \cdot S \cdot \beta} \cdot \phi_{out}$$

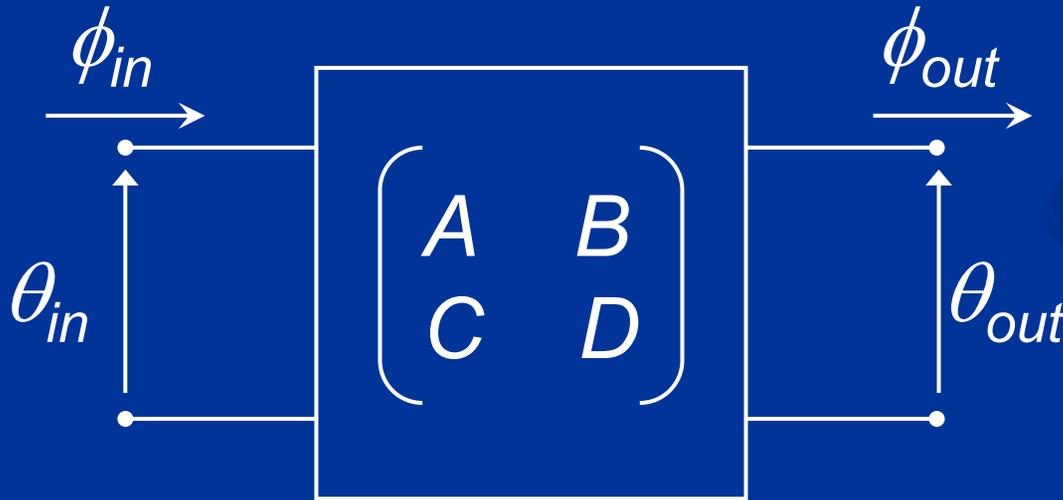
$$\phi_{in} = \lambda \cdot S \cdot \beta \cdot \sinh(\beta \cdot L) \cdot \theta_{out} + \cosh(\beta \cdot L) \cdot \phi_{out}$$

Queste equazioni scritte in forma matriciale sono rappresentabili con il formalismo dei quadrupoli.

$$\begin{bmatrix} \theta_{in} \\ \phi_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_{out} \\ \phi_{out} \end{bmatrix}$$

con

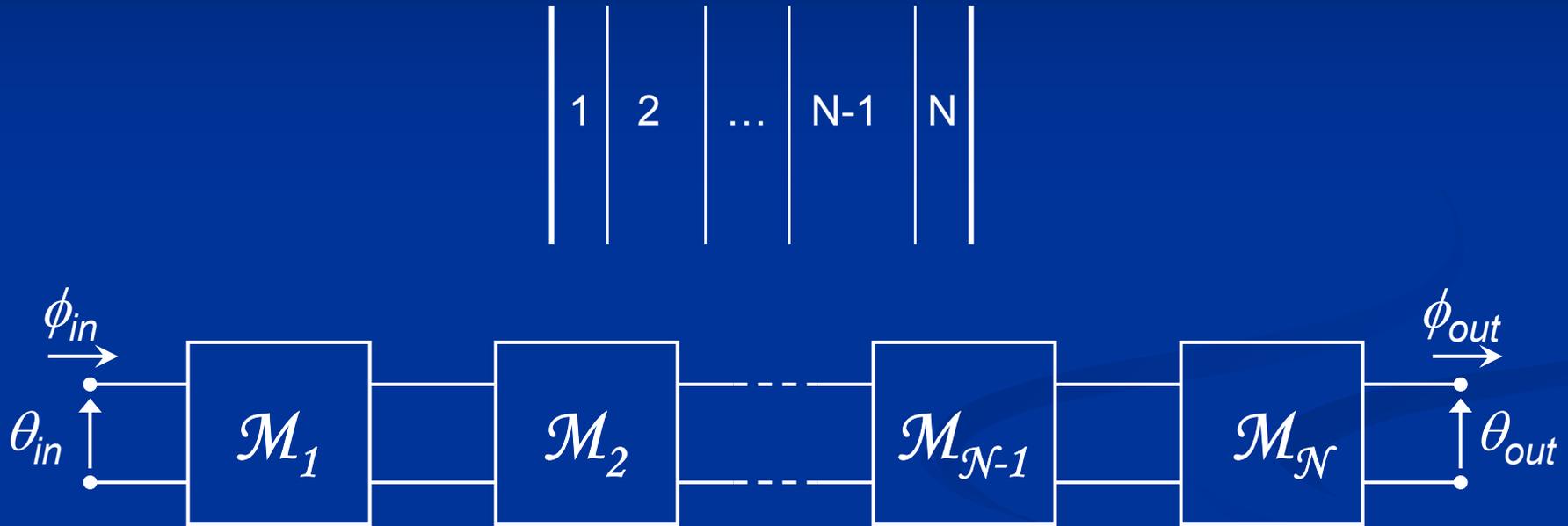
$$\begin{cases} A = D = \cosh(\beta \cdot L) \\ B = \frac{1}{\lambda \cdot S \cdot \beta} \cdot \sinh(\beta \cdot L) \\ C = \lambda \cdot S \cdot \beta \cdot \sinh(\beta \cdot L) \end{cases}$$



- Il sistema è simmetrico:
A=D
- La matrice del sistema ha determinante unitario:
 $AD - BC = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

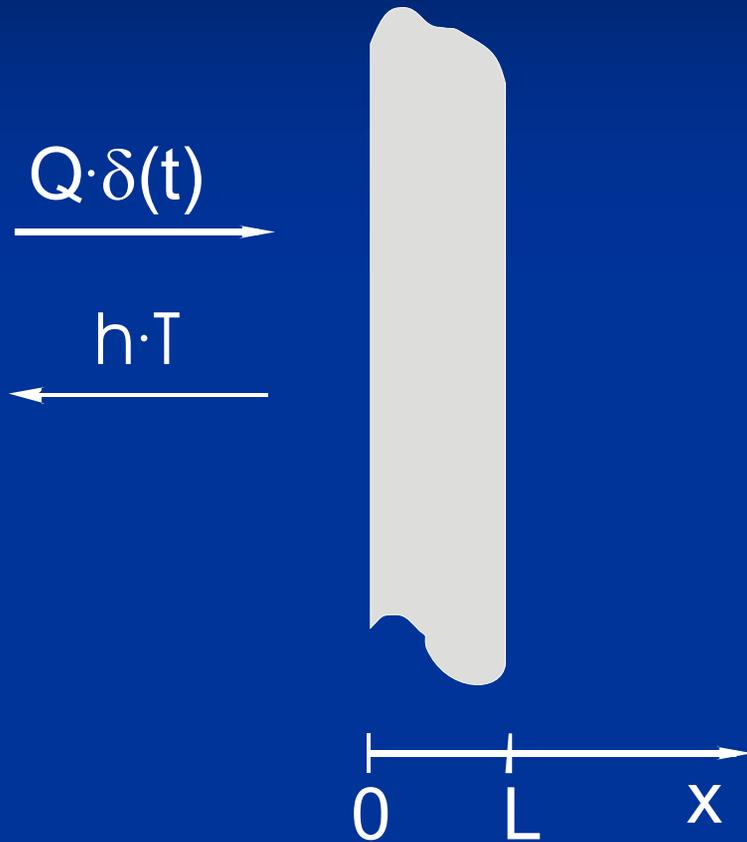
Materiali multistrato

Il formalismo dei quadrupoli consente di rappresentare facilmente strutture composite multistrato.



$$\begin{bmatrix} \theta_{in} \\ \phi_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{out} \\ \phi_{out} \end{bmatrix}$$

Caso studio: soluzione con i quadrupoli



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Condizione iniziale

$$T(x,0) = 0$$

Condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = Q \cdot \delta(t) - h \cdot T \\ -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{array} \right.$$

In questo caso le trasformate dei flussi al contorno sono

$$\begin{cases} \phi_{in} = Q - h \cdot \theta_{in} \\ \phi_{out} = 0 \end{cases}$$

Quindi le equazioni del quadripolo diventano

$$\begin{bmatrix} \theta_{in} \\ Q - h \cdot \theta_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_{out} \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\theta_{in} = \frac{A \cdot Q}{C + A \cdot h}$$

$$\theta_{out} = \frac{Q}{C + A \cdot h}$$

La trasformata inversa

- Con il metodo dei quadrupoli, la soluzione analitica dell'equazione della conduzione di calore è espressa in termini di trasformata di Laplace della temperatura.
- Per ricavare la temperatura in funzione del tempo è necessario applicare alla temperatura nello spazio trasformato la trasformata inversa, che viene definita come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{p \cdot t} \cdot dp$$

dove c deve essere maggiore della parte reale di ogni singolarità di $F(p)$. Una singolarità della funzione F è un valore p dove F non assume un singolo valore oppure non è derivabile nel piano complesso.

- Generalmente, per la soluzione di tale integrale si ricorre a metodi numerici. Il metodo dei quadrupoli viene per questo a volte definito “*semi-analitico*”.

Principio del metodo di Gaver-Stehfest (1)

- Il principio del metodo di Gaver, perfezionato poi da Stehfest, si basa sulla seguente proprietà della distribuzione di Dirac $\delta(t)$ che è valida per ogni funzione $f(t)$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \lambda) \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda$$

- Una funzione Δ -convergente $\delta_N(t, \lambda)$ è un'approssimazione della distribuzione di Dirac traslata $\delta(t - \lambda)$ e soddisfa perciò la proprietà

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(t, \lambda) = \delta(t - \lambda)$$

- La particolare funzione Δ -convergente scelta da Stehfest è

$$\delta_N(t, \lambda) = \sum_{j=1}^N u_j \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{a_j \cdot \lambda}{t}}$$

Principio del metodo di Gaver-Stehfest (2)

- I coefficienti u_j e a_j vengono scelti in modo da ottimizzare la relazione

$$L[\delta_N(t, \lambda)] \cong L[\delta(t - \lambda)] = e^{-p \cdot \lambda}$$

- Una volta ottimizzati i coefficienti u_j e a_j la funzione $f(t)$ può essere calcolata come

$$f(t) \cong \int_0^{\infty} \delta_N(t, \lambda) \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^N u_j \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-\frac{a_j \cdot \lambda}{t}} \cdot d\lambda$$

- Notando che il termine integrale è la trasformata di Laplace di $f(t)$ calcolata in $p = (a_j / t)$ si ha

$$f(t) \cong \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^N u_j \cdot F\left(\frac{a_j}{t}\right)$$

$$f(t) \cong \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^N u_j \cdot F\left(\frac{a_j}{t}\right)$$

Ponendo $a_j = j \cdot \ln(2)$ e $u_j = V_j \cdot \ln(2)$ questa formula diventa

$$f(t) \cong \frac{\ln(2)}{t} \cdot \sum_{j=1}^N V_j \cdot F\left(\frac{j \cdot \ln(2)}{t}\right)$$

Dove V_j per un numero N pari è dato dall'espressione

$$V_j = (-1)^{j+N/2} \sum_{k=\text{Int}((j+1)/2)}^{\text{Min}(N/2, j)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (j-k)! (2k-j)!}$$

Dove *Int* è la parte intera di un numero reale e *Min* è il minimo di due numeri

Principio del metodo di Gaver-Stehfest (3)

- E' facilmente traducibile in qualsiasi linguaggio di programmazione
- Essendo i coefficienti di Stehfest costanti, l'algoritmo non richiede alcun adattamento dei parametri al problema specifico
- La scelta del numero N di coefficienti da utilizzare dipende dalla precisione floating-point del computer. Ad esempio in singola precisione generalmente $N=10$ mentre in doppia precisione $N=20$

Il metodo degli elementi finiti (FEM)

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è una tecnica numerica atta a cercare soluzioni approssimate di problemi al contorno e ai valori iniziali descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali riducendo queste ultime ad un sistema di equazioni algebriche.

Il dominio del problema viene discretizzato formando una griglia (*mesh*). Su ciascun elemento di forma elementare (triangoli, quadrilateri, tetraedri, esaedri) la soluzione si assume essere combinazione lineare di *funzioni di base* o *funzioni di forma*.

Si voglia calcolare la distribuzione di temperatura in una piastra $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, Lz]$, avente sezione rettangolare $\Omega = [0,1] \times [0,1]$; la piastra è circondata da aria a temperatura u_e e la sua temperatura iniziale è $u(0,x,y,z)=u_0+u_1*x$. La temperatura varia poco lungo l'asse z e dunque in prima approssimazione può essere risolto nella sezione 2D Ω :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, y, 0) &= u_0 + x u_1 \\ \kappa \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(u - u_e) &= 0 \text{ on } \Gamma \times (0, T). \end{aligned}$$

Formulazione forte

Il termine $\alpha(u - u_e)$ tiene conto dello scambio per convezione con l'aria. Matematicamente questa condizione al contorno è mista (Robin).

Condizione di Neumann	→	la derivata della funzione (flusso) assume valori imposti sul bordo del dominio
Condizione di Dirichlet	→	la soluzione (temperatura) assume valori imposti sul bordo del dominio
Condizione di Robin	→	si impone un legame tra flusso e temperatura sul bordo del dominio

La **formulazione debole** (variazionale) del problema sta in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$; applicando inoltre lo schema di Eulero implicito (quindi *incondizionatamente stabile*) per la discretizzazione nel tempo, il problema diventa trovare $u^n(x,y)$ che soddisfi, per ogni $w \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} w + \kappa \nabla u^n \nabla w \right) + \int_{\Gamma} \alpha (u^n - u_e) w = 0$$

Lo scambio di calore per radiazione è proporzionale alla temperatura assoluta alla quarta potenza (legge di Stefan); in tal caso la condizione al contorno diventa:

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha (u - u_e) + c [(u + 273)^4 - (u_e + 273)^4] = 0$$

Il problema diventa però nonlineare e va risolto iterativamente, come successione di problemi lineari (ad esempio con il metodo di Newton).

Dominio complesso

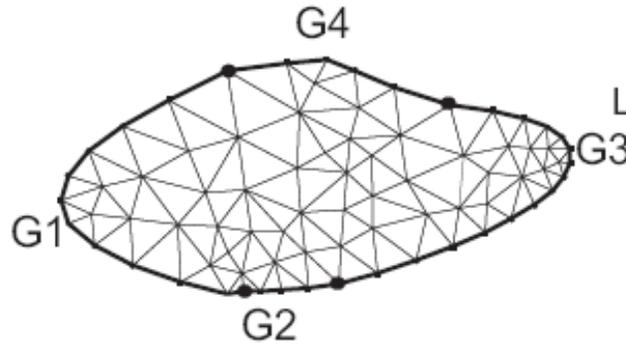
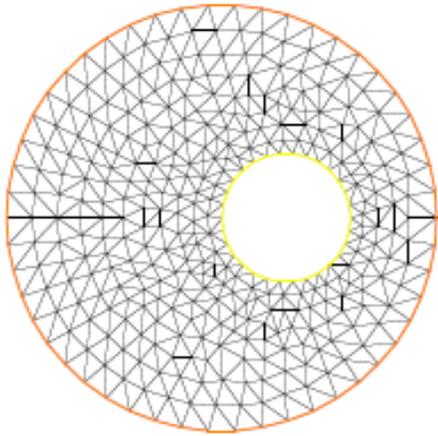


Figure 5.23: Boundary drawn by Bezier curves

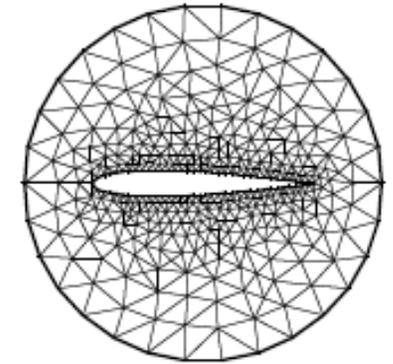
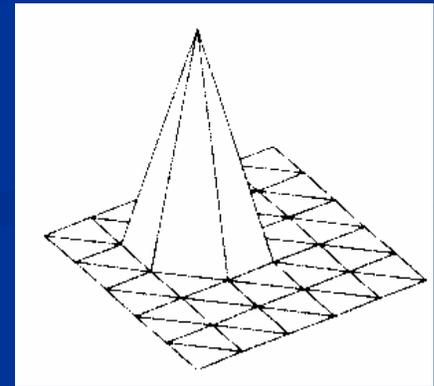
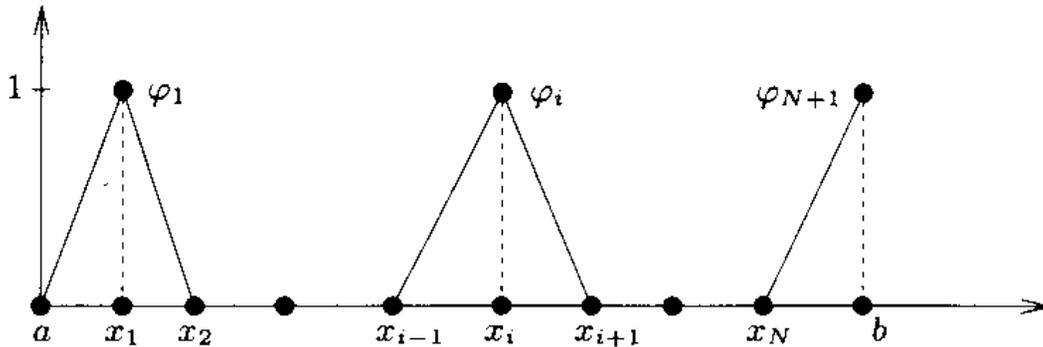
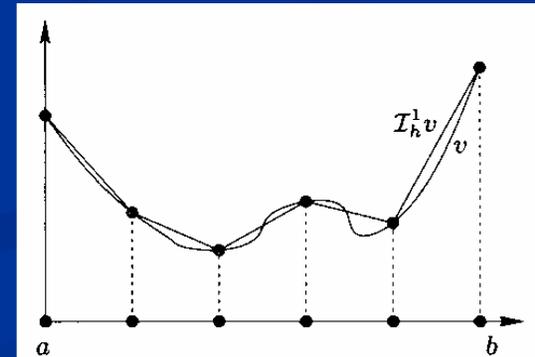


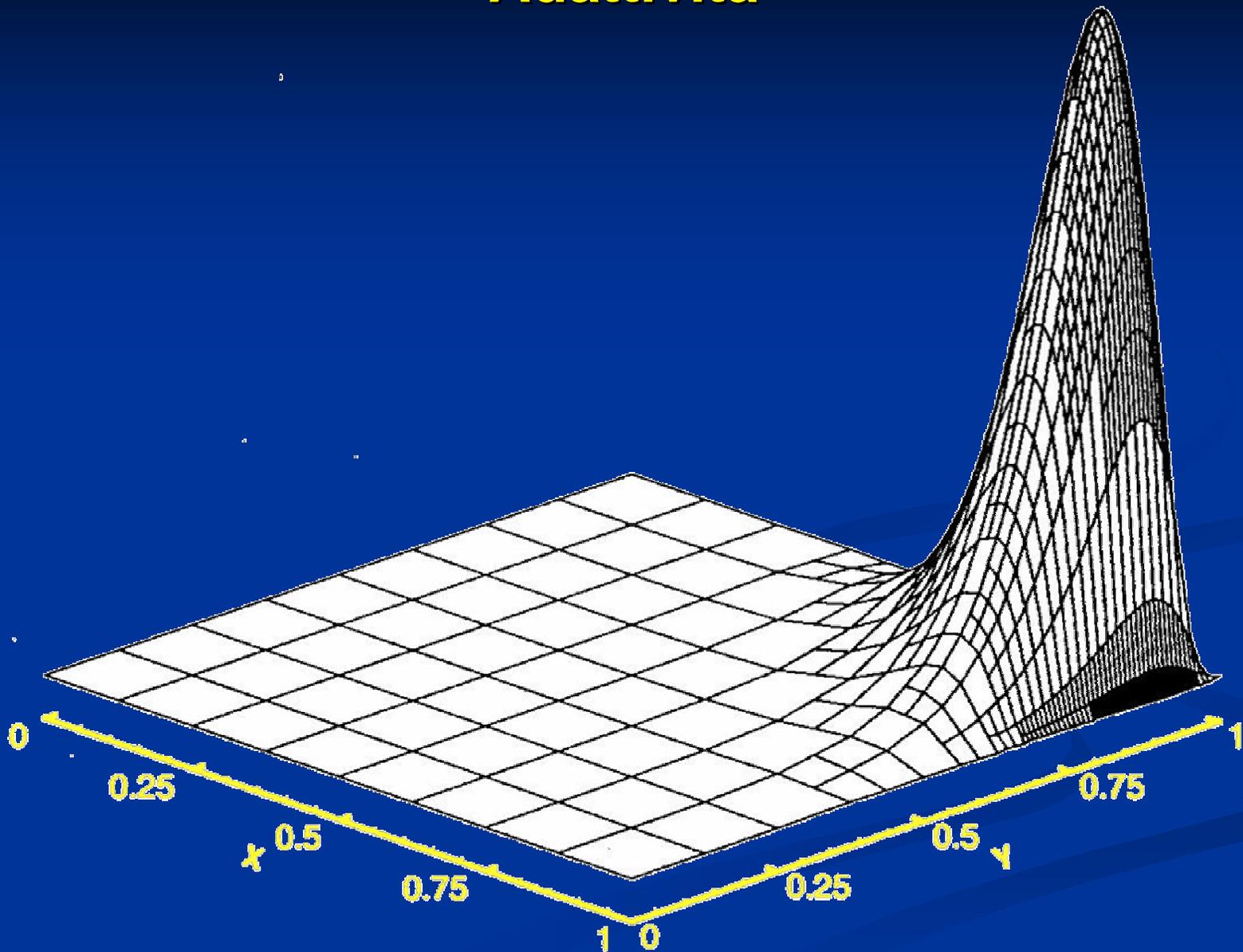
Figure 5.20: NACA0012 Airfoil



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}) & \text{if } x \in I_{i-1}, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x) & \text{if } x \in I_i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$



Adattività



Esempio applicato alla corrosione

