

La termografia infrarossa e il problema termico inverso

parte III

Il problema termico inverso: introduzione e applicazioni

Dr. Sergio Marinetti

Consiglio Nazionale delle Ricerche - Istituto per le Tecnologie della Costruzione



Problema termico diretto

Calcolo dell'evoluzione temporale della distribuzione spaziale di temperatura a partire da:

- geometria del problema
- proprietà termo-fisiche dei materiali
- condizioni al contorno e iniziali

Problema termico inverso

Stima di grandezze legate a:

- geometria del problema
- proprietà termo-fisiche dei materiali
- condizioni al contorno e iniziali

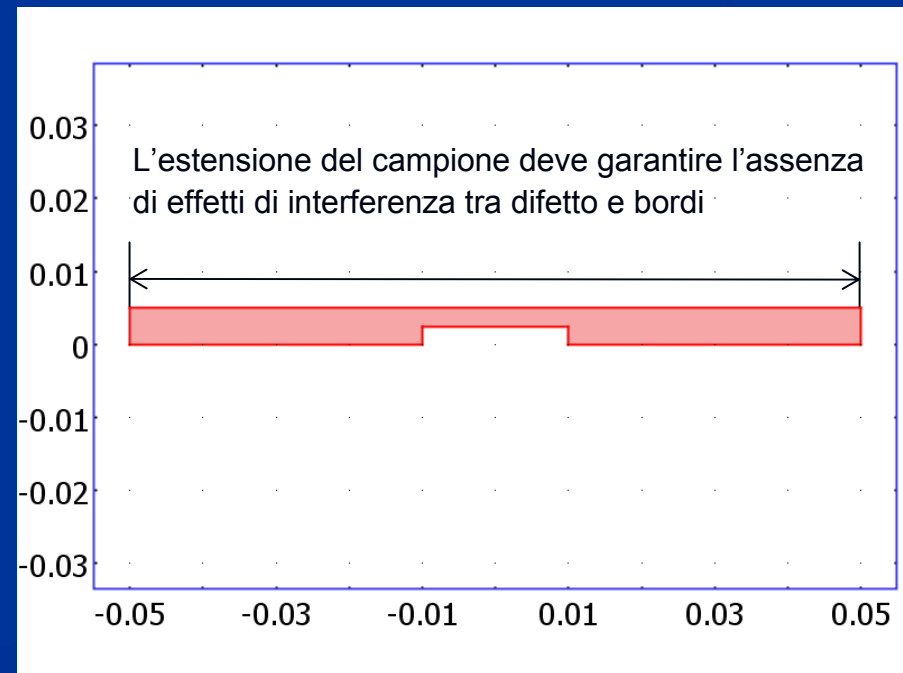
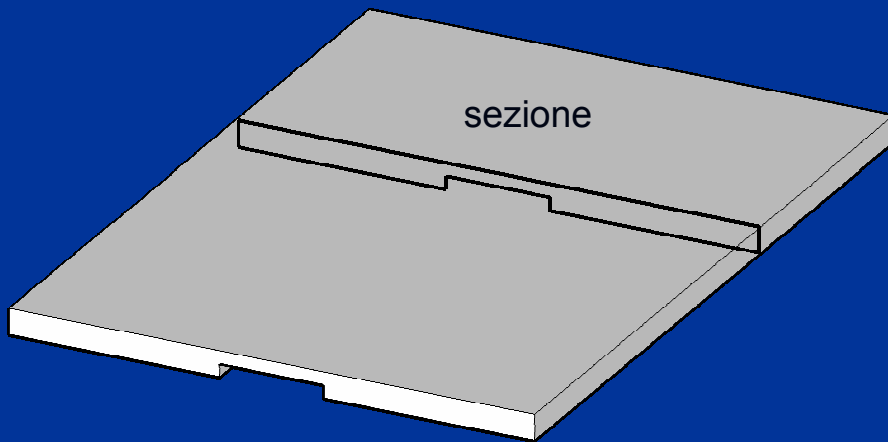
a partire dalla conoscenza della temperatura

Peculiarità delle immagini IR

- Le immagini termografiche, diversamente da quelle che abitualmente trattiamo (es. fotografie), non visualizzano la luce riflessa da un oggetto, bensì la **radiazione emessa** nell'infrarosso. Questa, dipendendo dal flusso calore, risponde alle leggi della diffusione, quindi quello che vediamo in superficie è anche l'effetto di ciò che sta succedendo all'interno dell'oggetto osservato.
- La stima delle dimensioni di una caratteristica sub-superficiale non si può perciò basare solamente su una calibrazione geometrica dell'immagine termografica, come invece avviene nel visibile
- La dimensione apparente di un difetto varia nel tempo a causa della diffusione del fronte termico all'interno del materiale
- E' necessario un modello matematico del processo termico. Come abbiamo visto, le soluzioni analitiche sono disponibili solo per casi semplici e sono complesse da trattare
- In alcuni casi solo l'utilizzo di un modello numerico può fornire informazioni utili alla soluzione del problema.

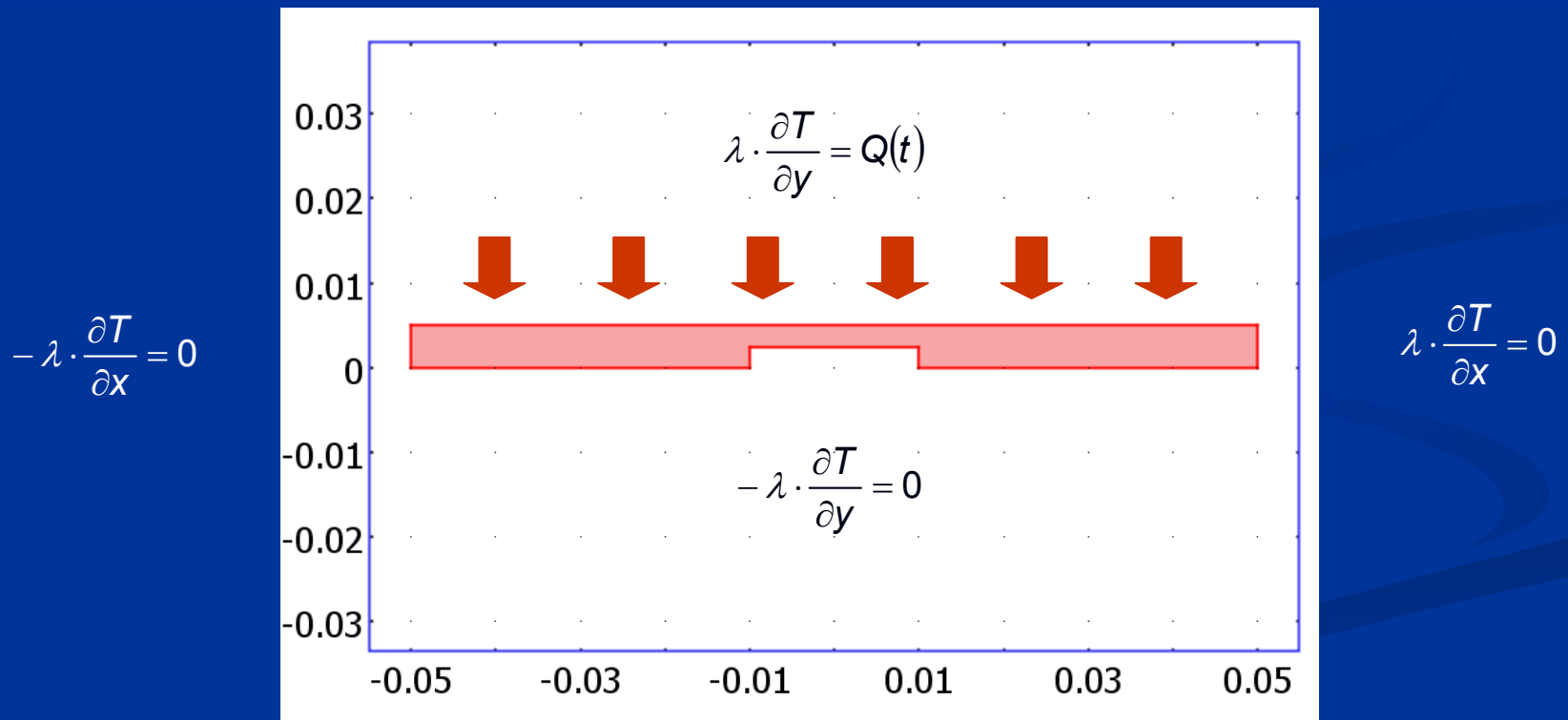
Stima dell'estensione di un difetto: modello FEM

- Il dominio del modello rappresenta una sezione 2D dell'oggetto da simulare
- Al dominio vengono associate le proprietà termo-fisiche del materiale:
 - conduttività termica λ
 - calore specifico C
 - densità ρ



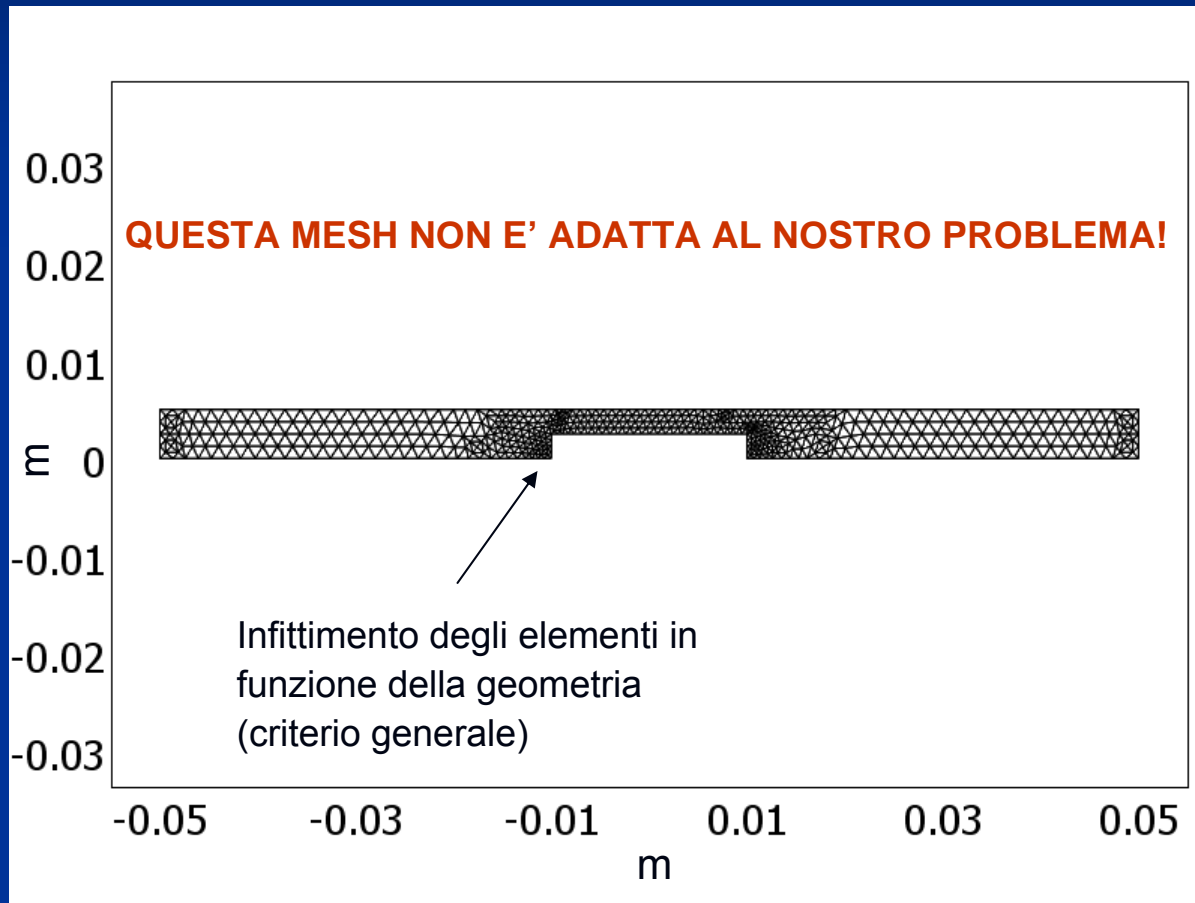
Le condizioni al contorno

- Il campione viene riscaldato sulla faccia superiore con un flash la cui potenza varia nel tempo con la funzione $Q(t)$ e si estingue in circa 15 ms
- Sulle altre facce si impone un flusso nullo
- In termini di condizioni al contorno del modello FEM si ha:

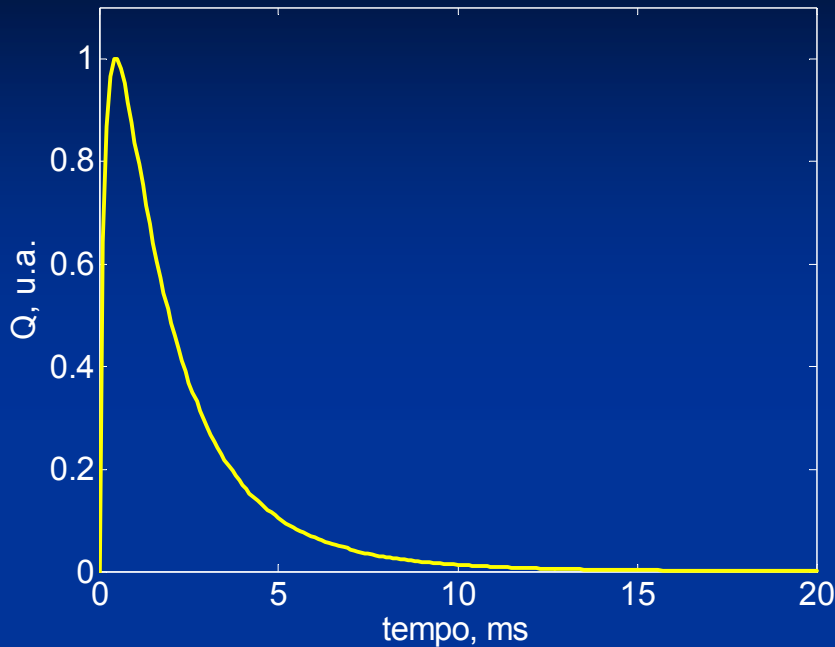


La mesh

- I software commerciali in genere propongono automaticamente una mesh come ad esempio la seguente composta da 508 elementi



- La condizione imposta sulla faccia riscaldata ha una dinamica molto veloce



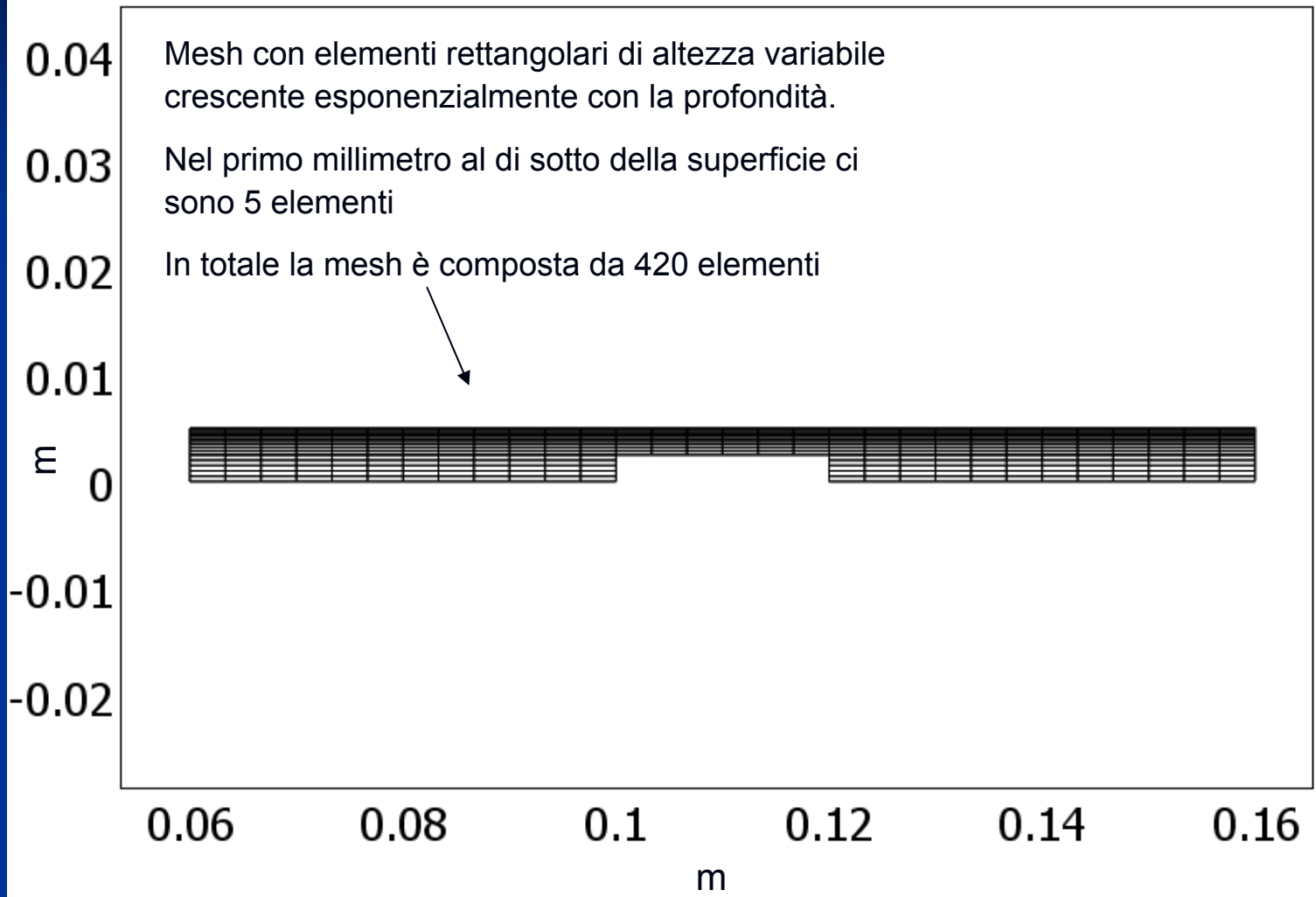
- Al tempo t ad una profondità pari a

$$\mu = \pi \cdot \sqrt{\alpha \cdot t}$$

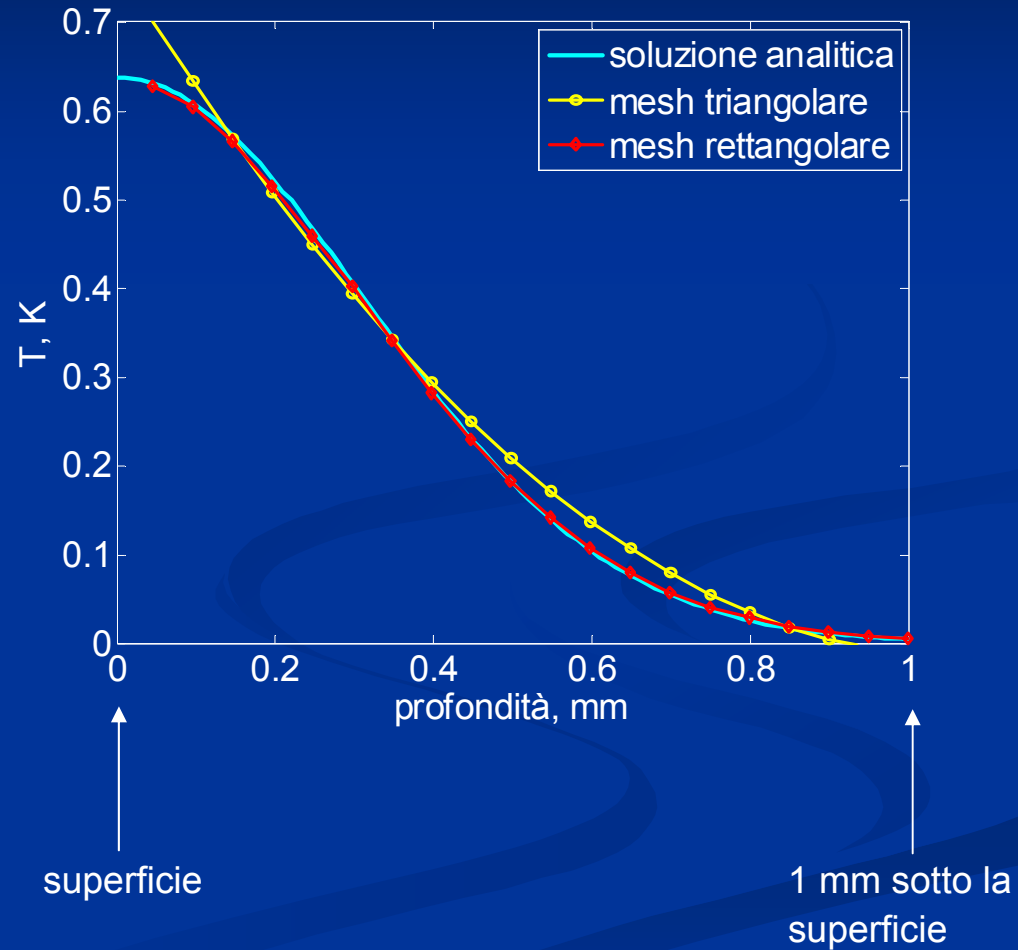
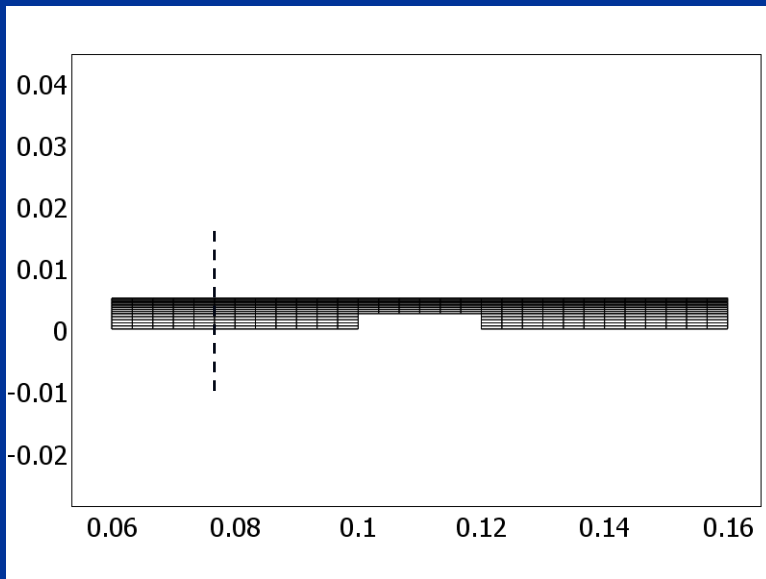
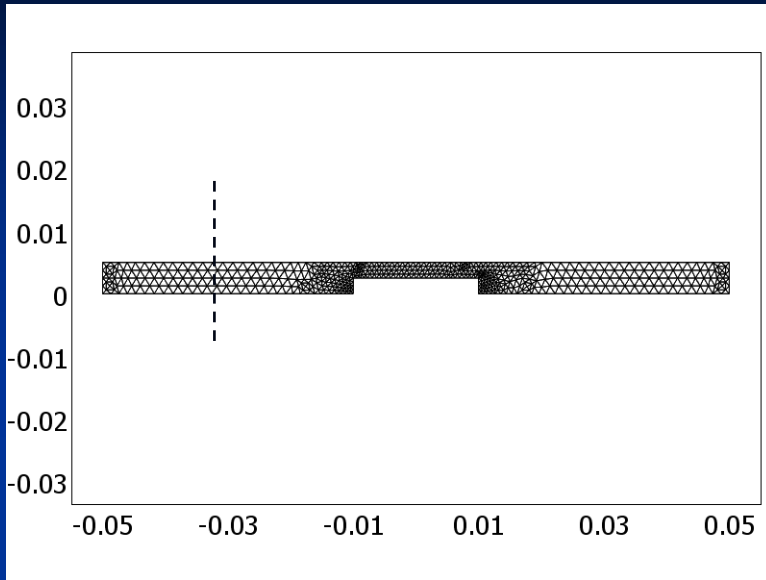
la temperatura si attenua del 90%, per cui possiamo dire che il fronte termico all'istante t si è propagato all'interno del materiale ad una profondità μ

- Nel caso in cui il materiale da simulare sia un acciaio con diffusività $\alpha=4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, al tempo $t=15 \text{ ms}$ il 'fronte termico' è penetrato di **0.77 mm**

- Gli elementi superficiali della mesh proposta hanno una dimensione di 1.25 mm, non sufficiente quindi a rappresentare la distribuzione di temperatura alla fine del riscaldamento nello strato sub-superficiale
- Inoltre gli elementi triangolari generano una distribuzione spaziale irregolare della temperatura

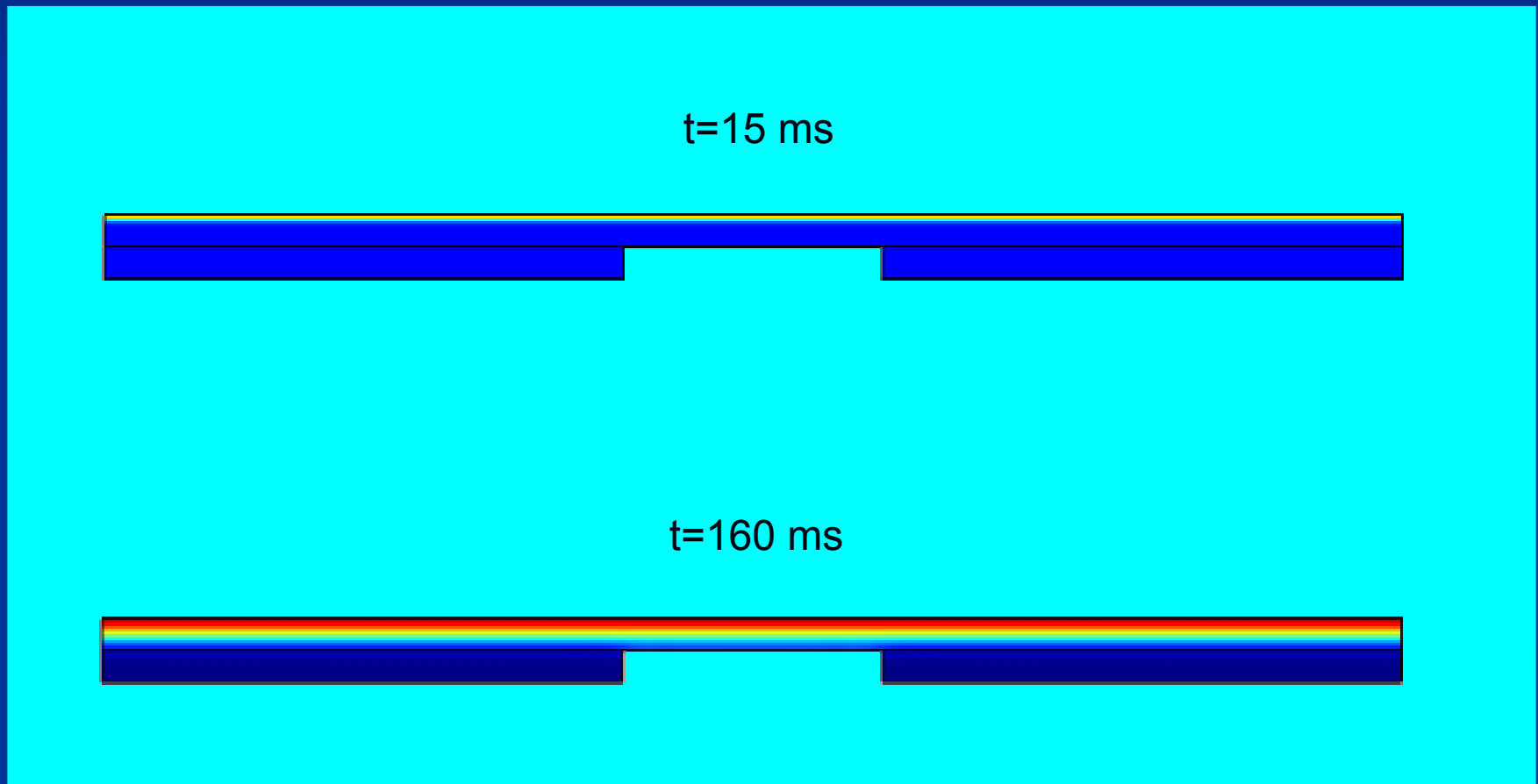


Distribuzione di temperatura in profondità a $t=15$ ms

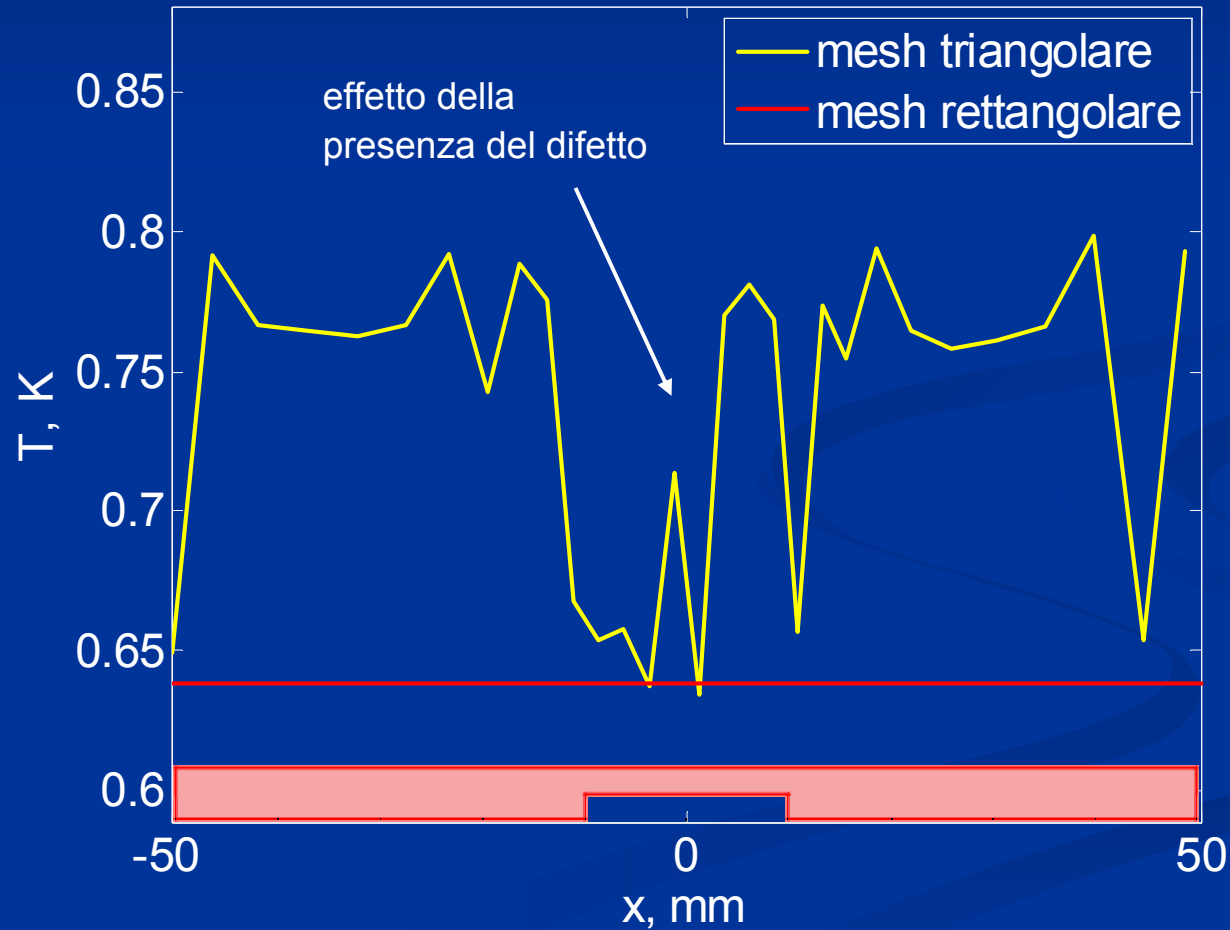


Distribuzione superficiale di temperatura a $t=15$ ms

Il difetto si trova ad una profondità di 2.5 mm e quindi verrà interessato dal fronte termico dopo circa 160 ms.



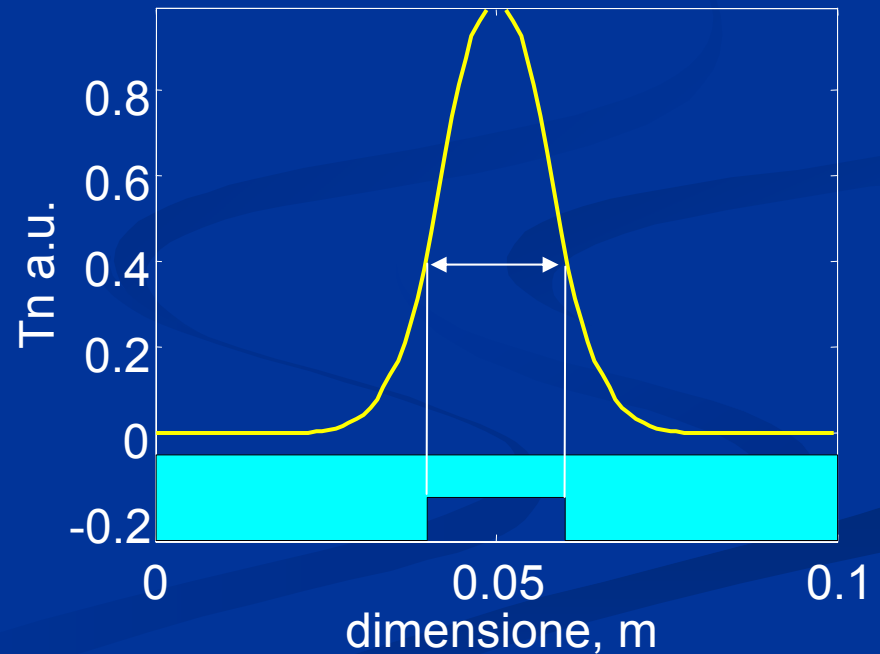
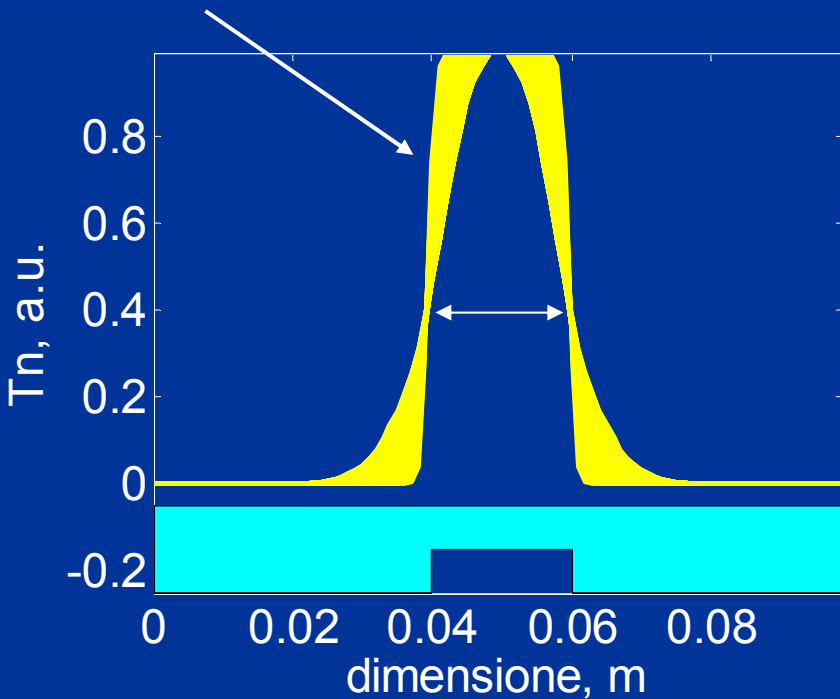
Il profilo superficiale dopo 15 ms non deve mostrare la presenza del difetto.



Stima della dimensione reale

Il modello FEM, attraverso l'analisi dell'evoluzione dei profili superficiali di temperatura normalizzati, ha consentito di individuare un criterio di scelta dei punti da considerare per la stima della dimensione del difetto.

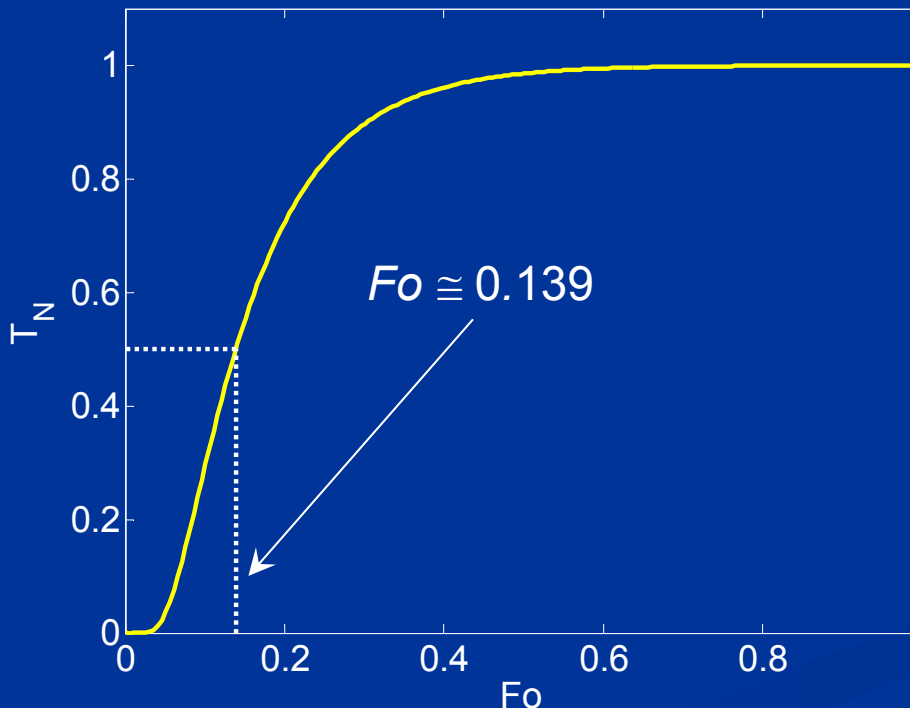
profili normalizzati della temperatura superficiale



Stima della diffusività termica

Nel caso di una lastra piana adiabatica sollecitata frontalmente con un impulso di Dirac, la temperatura normalizzata sulla faccia posteriore è data dall'equazione:

$$T_N(Fo) = \frac{T(Fo)}{(Q \cdot \alpha) / (\lambda \cdot L)} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo}$$



$$Fo|_{T_N=0.5} = \frac{\alpha \cdot t_{0.5}}{L^2} \approx 0.139$$

**Formula di Parker
(Flash method)**

$$\alpha \approx \frac{0.139 \cdot L^2}{t_{0.5}}$$

Considerazioni sulla formula di Parker

- La formula di Parker vale nel caso di test eseguito in assenza di scambio con l'ambiente circostante (condizioni adiabatiche)
- Normalmente durante un test il campione scambia calore con l'ambiente per convezione e/o irraggiamento
- Al fine di ridurre lo scambio per convezione (dovuto all'interazione tra fluido circostante e campione) la misura si esegue all'interno di una campana a vuoto
- Lo scambio per irraggiamento si riduce rendendo riflettenti le pareti interne della campana in modo che il campione *“veda se stesso”*.
- Nel caso di test eseguiti senza le suddette precauzioni, la formula di Parker può essere utilizzata se il numero di Biot è basso

Il numero di Biot (1)

Il numero di Biot indica lo sbilanciamento tra il trasferimento di calore verso l'ambiente circostante e quello all'interno del corpo

$$Bi = \frac{h \cdot L}{\lambda} = \frac{h}{(\lambda / L)}$$

coefficiente di scambio
con l'ambiente

trasmissione termica
del materiale

La formula di Parker vale per $Bi=0$ ma può essere utilizzata anche per bassi valori di Bi (ad esempio per metalli sottili).

AISI 304 (metallo)

$$h=20 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

$$L=3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda=16 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$Bi=0.004$$

PVC (plastica)

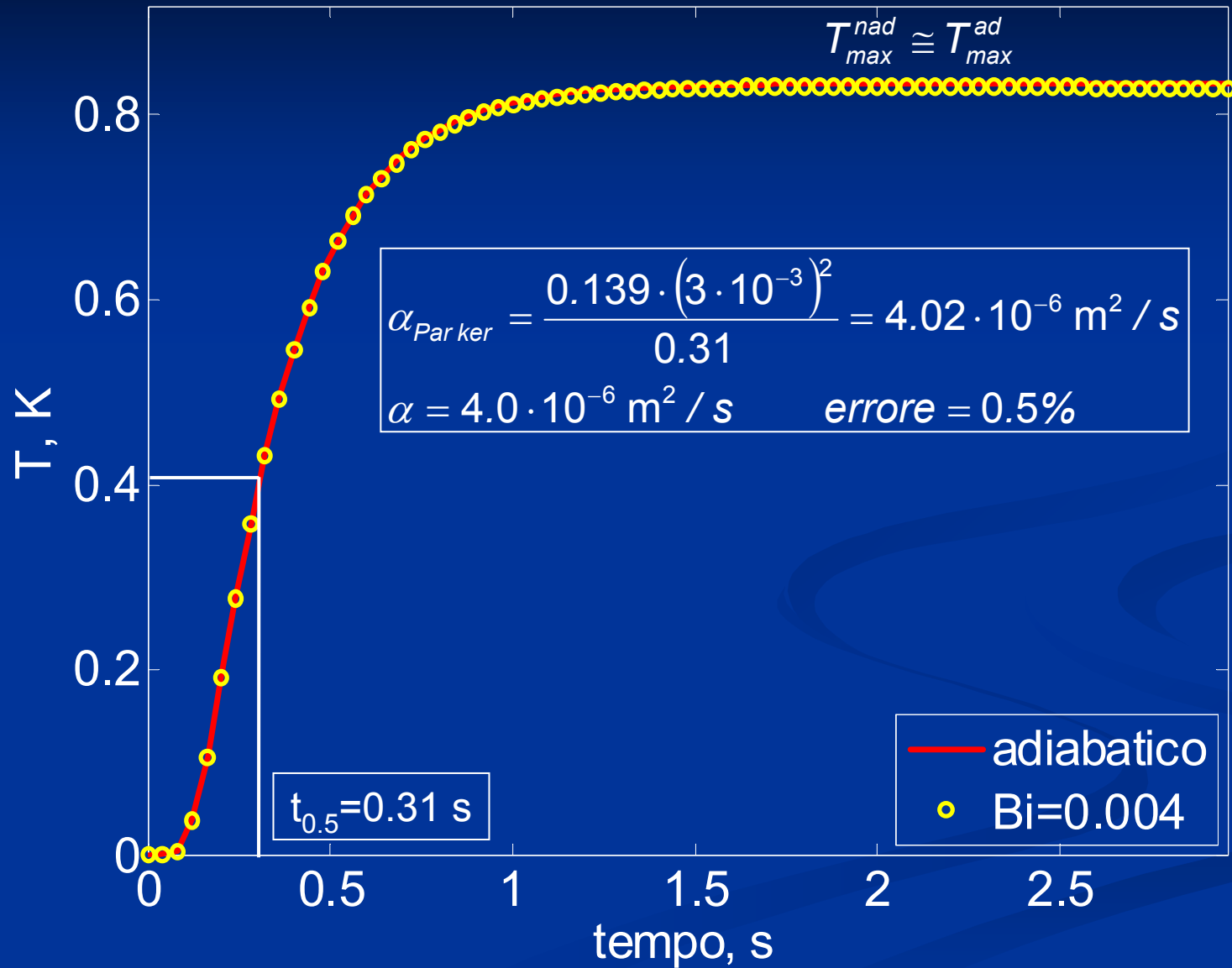
$$h=20 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

$$L=3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

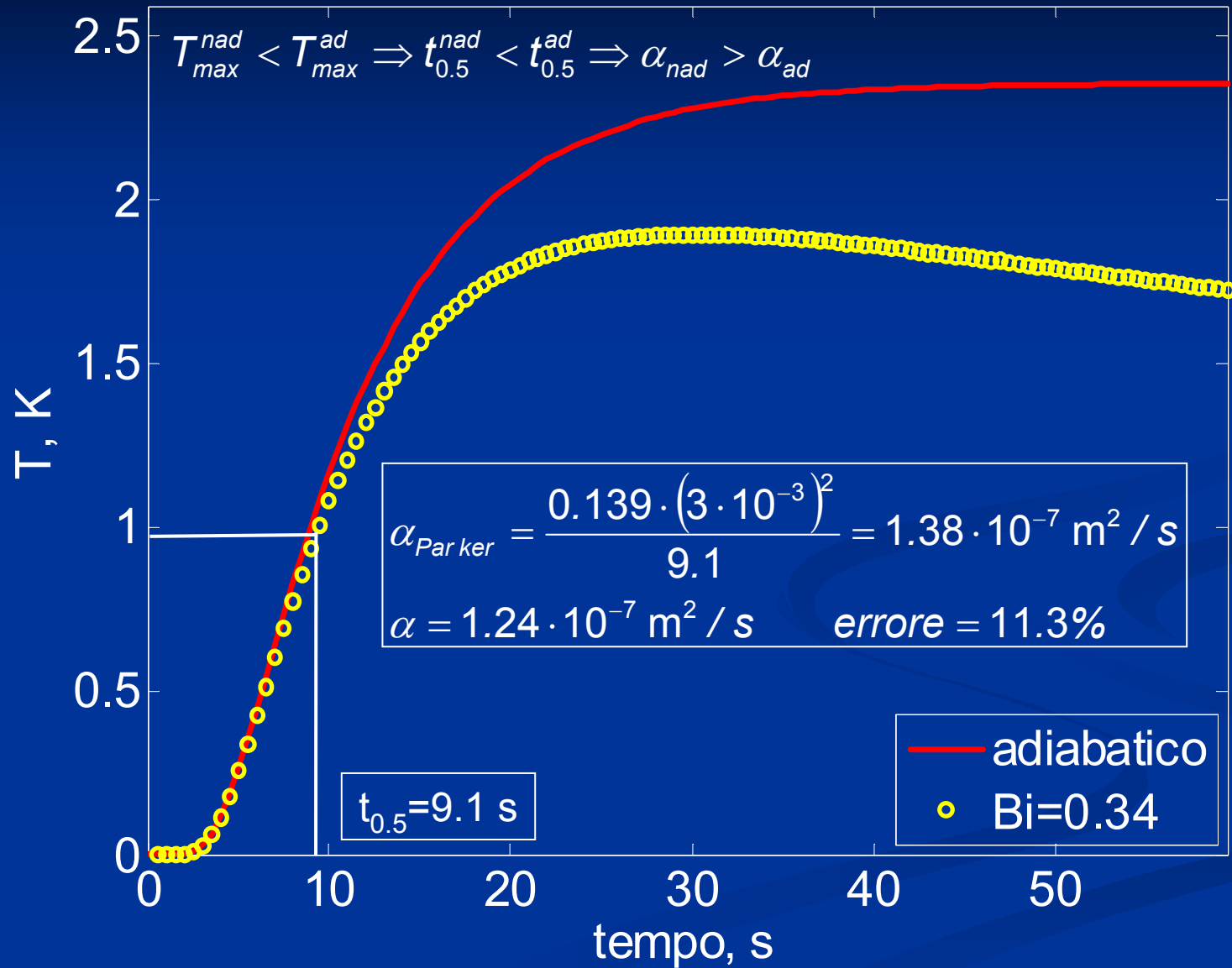
$$\lambda=0.175 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$Bi=0.34$$

AISI 304



PVC



Richiami sulla stima di parametri non lineari

- In generale i modelli termici sono funzioni non-lineari dei parametri.
- Sia dato un profilo sperimentale di temperatura $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^N$, di cui si voglia stimare il vettore di parametri $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ ed un profilo di dati simulati di temperatura $\hat{Y}_\theta \in \mathbb{R}^N$. Sia $E_\theta \in \mathbb{R}^N$ il vettore degli errori di predizione dipendente da θ il cui elemento all'istante n è dato da

$$e_{n,\theta} = \tilde{y}_n - \hat{y}_{n,\theta(n)}$$

dove \tilde{y}_n e $\hat{y}_{n,\theta(n)}$ sono le componenti n -esime rispettivamente di \tilde{Y} e \hat{Y}_θ .

- Sia $V_{N,\theta} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\tilde{y}_n - \hat{y}_{n,\theta(n)})^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}$ una funzione costo
- Per stimare i parametri si risolve un problema ai minimi quadrati non lineare

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} F_{N,\theta} \quad , \quad F_{N,\theta} = V_{N,\theta}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N e_{n,\theta}^2$$

Il metodo di Newton (1)

Sia $F'_{N,\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta}$ il gradiente

$$F'_{N,\theta} = \frac{d}{d\theta} F_{N,\theta}$$

e $F''_{N,\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta \times n\theta}$ l'Hessiano

$$F''_{N,\theta} = \frac{d^2}{d\theta^2} F_{N,\theta}$$

Definita $\psi_\theta \in \mathbb{R}^{N \times n\theta}$ la matrice di sensitività delle uscite rispetto alle variazioni dei parametri:

$$\psi_\theta = -\frac{d}{d\theta} \hat{Y}_\theta$$

si ha

$$F'_{N,\theta} = \frac{d}{d\theta} F_{N,\theta} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N (\psi_\theta(n,:) e_{n,\theta}) \quad \text{con } F'_{N,\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta}$$

$$F''_{N,\theta} = \frac{d^2}{d\theta^2} F_{N,\theta} = \frac{2}{N} \left(\sum_{n=1}^N \psi_\theta^T(n,:) \psi_\theta(n,:) e_{n,\theta} + \psi_\theta'^T(n,:,:) e_{n,\theta} \right) \quad \text{con } F''_{N,\theta} \in \mathbb{R}^{n\theta \times n\theta}$$

Il metodo di Newton (2)

Utilizzando il metodo di Newton applicato alla ricerca di un punto di stazionarietà per il gradiente, l'equazione di aggiornamento dei parametri alla k-esima iterazione è

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \left[F''_{N, \hat{\theta}^{(k)}} \right]^{-1} \cdot F'_{N, \hat{\theta}^{(k)}}$$

Adottando un passo variabile $\mu^{(k)}$ si ottiene il metodo *damped Newton*

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \mu^{(k)} \cdot \left[F''_{N, \hat{\theta}^{(k)}} \right]^{-1} \cdot F'_{N, \hat{\theta}^{(k)}}$$

dove $\mu^{(k)}$ assume valore iniziale pari a 1 e viene successivamente dimezzato finché si registra un valore effettivamente inferiore della funzione obiettivo $F_{N, \hat{\theta}^{(k+1)}}$

Per il calcolo di $\psi_{\theta^{(k)}}$, si può approssimare la derivata con una differenza finita centrata:

$$\psi_{\theta^{(k)}}(:, j) = -\frac{d}{d\theta_j} \hat{Y}_{\hat{\theta}_j} = \frac{\hat{Y}_{\hat{\theta}^{(k)} + \frac{h_{\theta_j}}{2}} - \hat{Y}_{\hat{\theta}^{(k)} - \frac{h_{\theta_j}}{2}}}{h_{\theta_j}}$$

Il metodo di Levenberg-Marquardt

$$F''_{N,\theta} = \frac{d^2}{d\theta^2} F_{N,\theta} = \frac{2}{N} \left(\sum_{n=1}^N \psi_{\theta}^T(n,:) \psi_{\theta}(n,:) e_{n,\theta} + \psi_{\theta}^T(n,:,:) e_{n,\theta} \right) \text{ con } F''_{N,\theta} \in \mathbb{R}^{n_{\theta} \times n_{\theta}}$$

Quando il residuo è sufficientemente piccolo, il termine $\psi_{\theta}^T(n,:,:) \cdot e_{n,\theta}$ è trascurabile e si può utilizzare la direzione di Gauss-Newton, ma quando tale termine non è trascurabile, il metodo di Gauss-Newton presenta problemi di convergenza. In tal caso si può utilizzare la soluzione proposta da Levenberg-Marquardt:

$$\left((\psi_{\theta})^T \psi_{\theta} + \lambda_k I \right) \delta\theta = -(\psi_{\theta})^T E_{\theta}$$

Dove il parametro λ_k viene scelto opportunamente ad ogni iterazione. Per $\lambda_k=0$ si ha il metodo di Gauss-Newton e per $\lambda_k \rightarrow \infty$ si tende allo steepest-descent.

Esempio: stima della diffusività termica in condizioni non adiabatiche con il metodo termografico

Schema in trasmissione

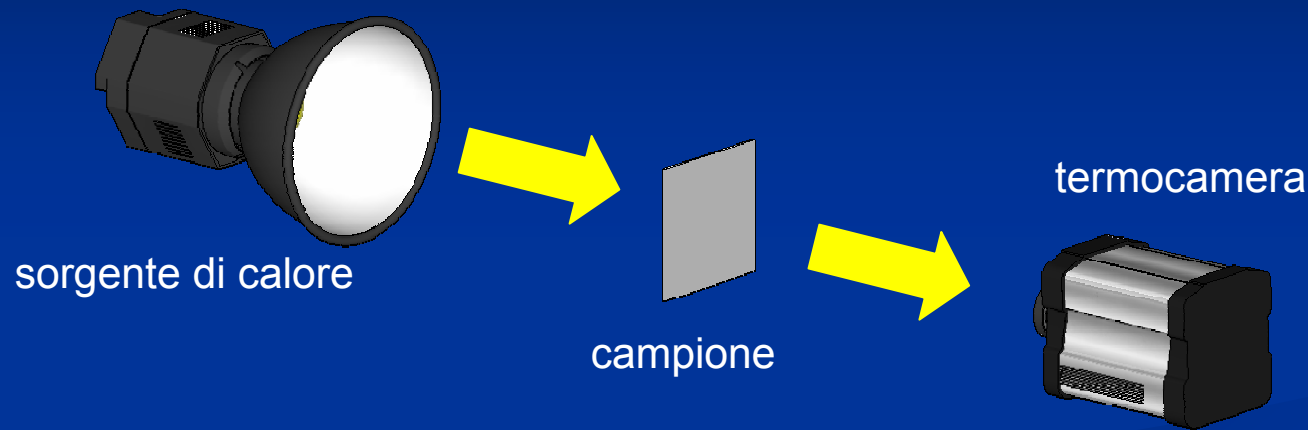
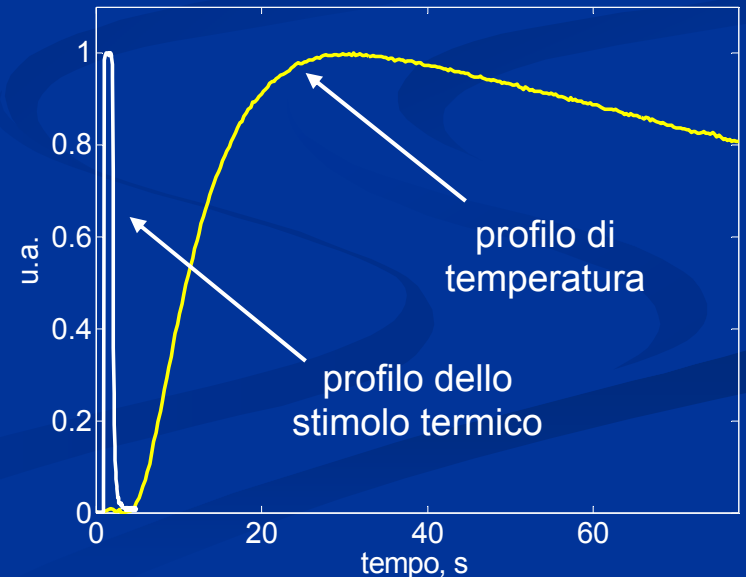
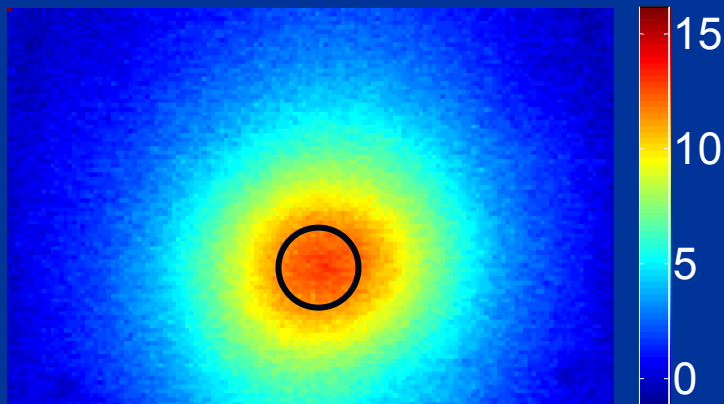


Immagine al tempo $t = 77.50$ s



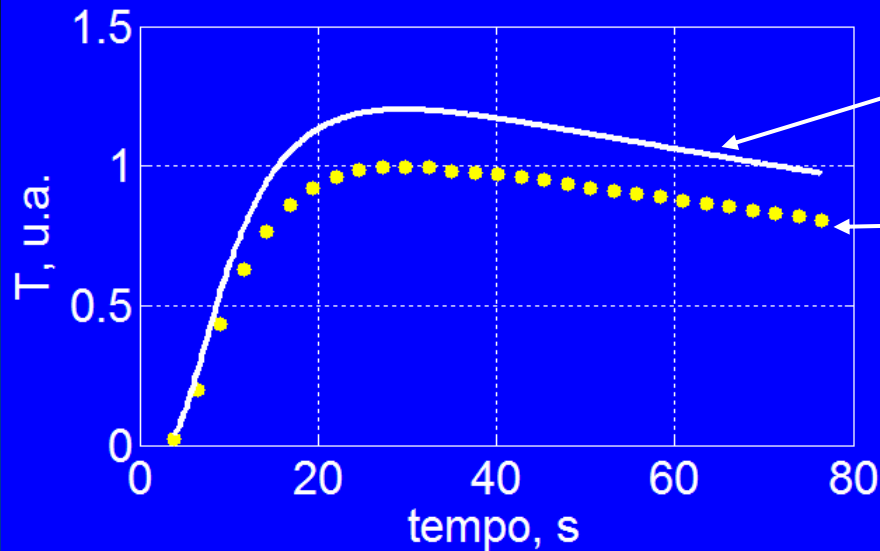
Non-linear Best Fit

La stima della diffusività α viene effettuata tramite una procedura iterativa di ottimizzazione basata sul modello termico (in questo caso analitico) parametrizzato:

- campione: lastra piana di spessore L [m]
- riscaldamento: impulso di durata t_h [s] e densità di potenza Q [W/m²]
- scambio di calore con l'ambiente rappresentato dal numero di Biot (Bi)
- temperatura sulla faccia posteriore

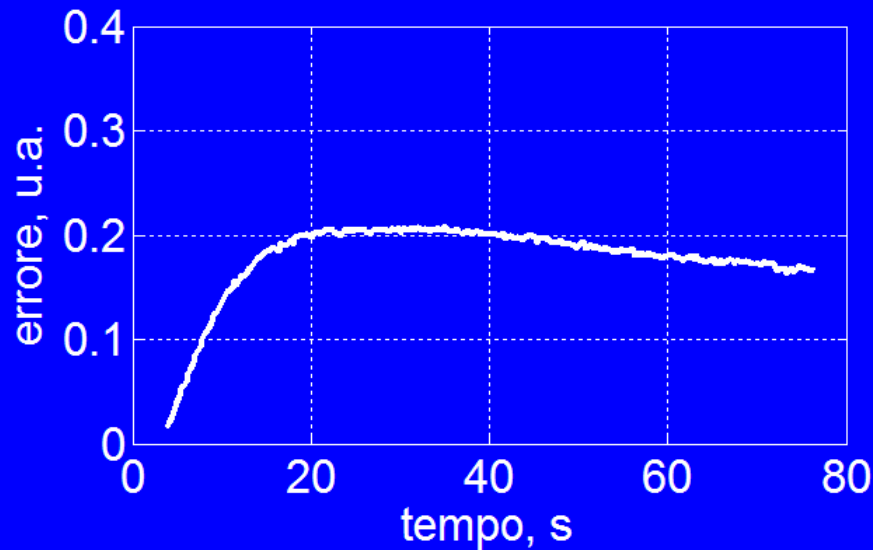
$$T(t) = \frac{Q}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi \cdot \sec(\mu_n)}{Bi \cdot (Bi + 1) + \mu_n^2} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha \cdot t}{L^2}} \cdot \left(e^{\mu_n^2 \frac{\alpha \cdot t_h}{L^2}} - 1 \right) \text{ per } t > t_h$$

The diagram illustrates the relationship between the equation's components and the input data. The word Parametri (Parameters) is written in yellow at the bottom center, with arrows pointing to the yellow-circled terms: $\frac{Q}{h}$, Bi , $\alpha \cdot t$, and t_h . The word Dati (Data) is written in blue at the bottom right, with arrows pointing to the blue-circled terms: $\frac{\alpha \cdot t_h}{L^2}$ and t_h .



Stima iniziale
 $X_0 = [\alpha \ Q/h \ Bi \ t_{\text{offset}}]$

dati sperimentali



Parametri stimati

$\alpha = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

$Q/h = 247.7 \text{ K}$

$Bi = 0.47$

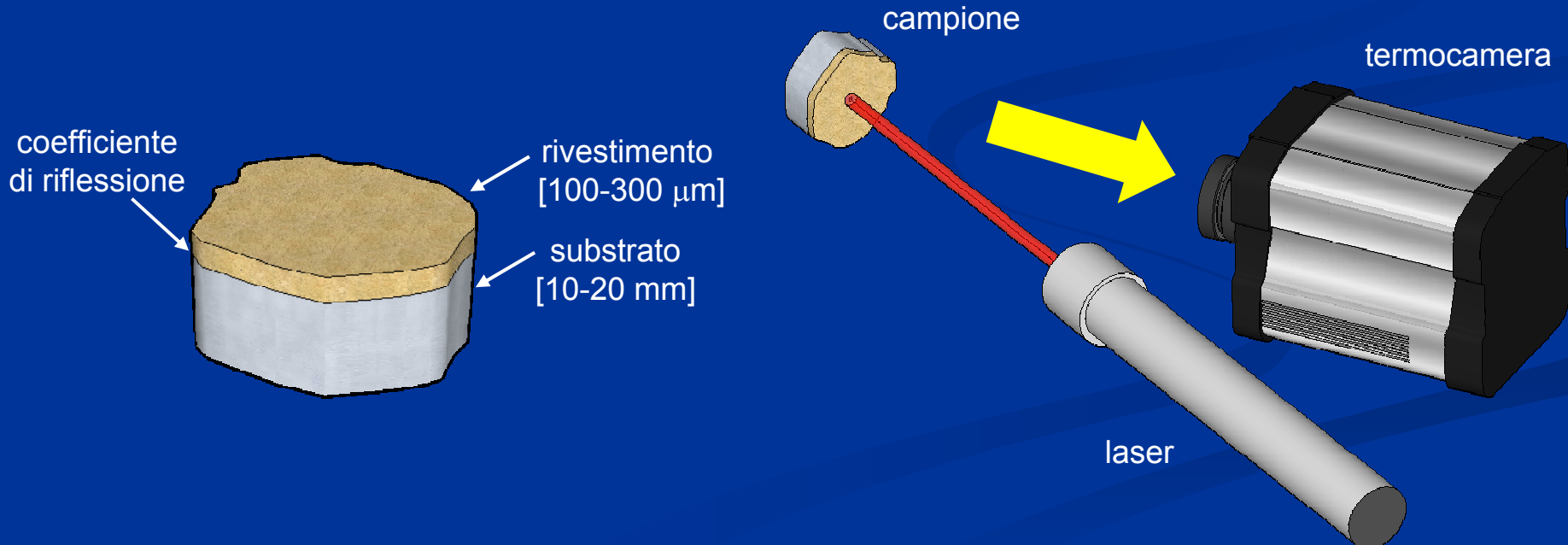
$t_0 = -1.3 \text{ s}$

Misura della diffusività di un rivestimento (1)

Obiettivo: stima della diffusività termica di un rivestimento depositato su di un substrato.

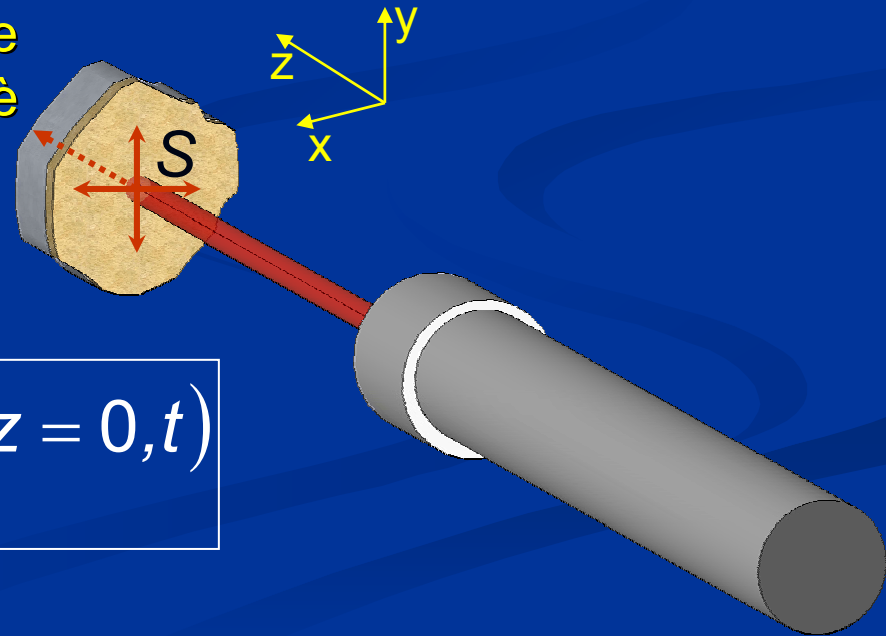
- Si utilizza lo schema in riflessione
- Lo spessore del rivestimento richiede di avere elevate densità di potenza in tempi molto brevi (utilizzo di un laser impulsato)

Schema in riflessione



Misura della diffusività di un rivestimento (2)

- La sollecitazione termica avviene in un'area limitata e dà origine ad un campo di temperatura 3D all'interno del campione e 2D in superficie.
- L'andamento nel tempo della temperatura al centro della zona riscaldata non è nemmeno in prima approssimazione descrivibile con un modello 1D a causa dell'importante effetto della diffusione laterale
- Essendo interessati alle proprietà "protettive" del rivestimento, dobbiamo analizzare la diffusione del calore in profondità nel tempo (1D) svincolandoci dalla diffusione laterale
- Si dimostra che l'evoluzione temporale della temperatura superficiale media è un processo termico 1D



$$\iint_S T_{3D}(x, y, z = 0, t) dx dy = T_{1D}(z = 0, t)$$

Richiami sul calcolo integrale (1)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Calcoliamo I^2

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Poniamo $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$ il cui determinante Jacobiano è $\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & r \cdot \cos \theta \end{vmatrix} = r$

$$I^2 = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r \cdot e^{-r^2} dr = -\pi \cdot \left[e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

c.v.d.

Richiami sul calcolo integrale (2)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot x^2 - b \cdot x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4 \cdot a}}$$

moltiplichiamo e dividiamo per $e^{A \cdot b^2} \Rightarrow I = e^{A \cdot b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot x^2 - b \cdot x - A \cdot b^2} dx$

calcoliamo A ponendo $a \cdot x^2 + b \cdot x + A \cdot b^2 = (\sqrt{a} \cdot x + \sqrt{A} \cdot b)^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4 \cdot a}$

$$I = e^{\frac{b^2}{4 \cdot a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a} \cdot x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot b\right)^2} dx \quad \text{ponendo } u = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2 \cdot \sqrt{a}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4 \cdot a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4 \cdot a}} \quad \text{c.v.d.}$$

Richiami sulla trasformata di Fourier (1)

Definizione: sia $f \in L(\mathfrak{R})$; la funzione complessa di variabile reale

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \omega \in \mathfrak{R}$$

si dice *trasformata di Fourier* della f .

Teorema: siano $f, g \in L(\mathfrak{R})$; allora per qualsiasi $t \in \mathfrak{R}$ esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

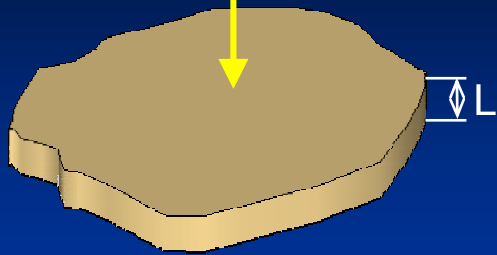
e questo integrale definisce una funzione $h(t)$ sommabile su \mathfrak{R} .

Definizione: La funzione h definita dall'integrale (1) si dice *prodotto di convoluzione* tra f e g e si indica con il simbolo $h = f * g$

Teorema: siano $f, g \in L(\mathfrak{R})$, sia $h = f * g$; allora $H(h) = F(f) \cdot G(g)$

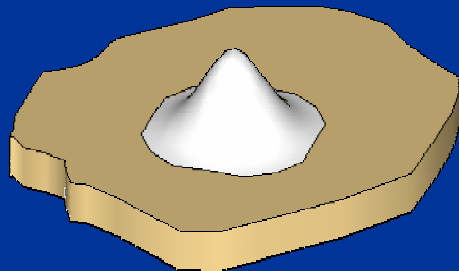
$$Q = \delta(x, y, t)$$

Soluzione per una lastra piana infinitamente estesa di spessore L riscaldata in superficie da una sorgente puntiforme istantanea senza scambio di calore con l'ambiente



$$T_{Dirac}(x, y, t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot t \cdot L} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4 \cdot \alpha \cdot t}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \cdot n^2 \cdot \pi^2} \right)$$

$$f(x, y)$$



$$T_f(x, y, t) = f(x, y) * T_{Dirac}(x, y, t)$$

Fourier

$$\theta_f(\omega, \varepsilon, t) = \phi(\omega, \varepsilon) \cdot \theta_{Dirac}(\omega, \varepsilon, t)$$

$$\begin{aligned} \theta_{Dirac}(\omega, \varepsilon, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\alpha t L} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4 \cdot \alpha \cdot t}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \cdot n^2 \cdot \pi^2} \right) \cdot e^{-j\omega x} \cdot e^{-j\varepsilon y} dx \cdot dy \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha t L} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \cdot n^2 \cdot \pi^2} \right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4 \cdot \alpha \cdot t}} \cdot e^{-j\omega x} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4 \cdot \alpha \cdot t}} \cdot e^{-j\varepsilon y} dy \end{aligned}$$

Ricordando che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \cdot x^2 - b \cdot x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4 \cdot a}}$$

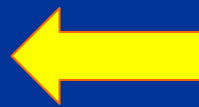
ponendo

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4\alpha t} \\ b = j\omega \end{cases} \Rightarrow I = 2\sqrt{\pi\alpha t} \cdot e^{-\omega^2\alpha t}$$

$$\theta_{Dirac}(\omega, \varepsilon, t) = \frac{1}{L} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \cdot n^2 \cdot \pi^2} \right) \cdot e^{-\alpha t \cdot (\omega^2 + \varepsilon^2)}$$

Trasformata di Fourier della risposta puntuale impulsiva

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int T_f(x, y, t) \cdot dx \cdot dy &= \theta_f(0, 0, t) \\ &= \phi(0, 0) \cdot \theta_{Dirac}(0, 0, t) \\ &= \frac{\phi(0, 0)}{L} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha \cdot t}{L^2} \cdot n^2 \cdot \pi^2} \right) \end{aligned}$$

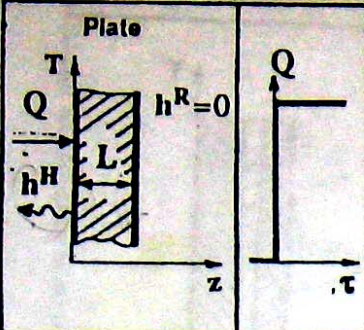
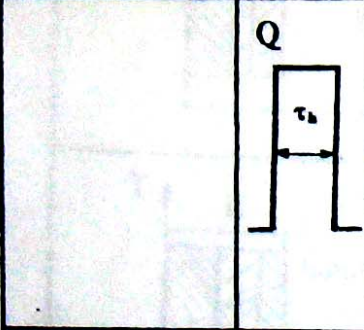
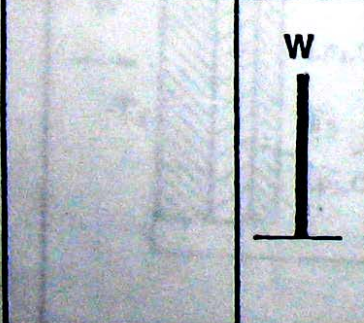


L'evoluzione temporale della temperatura superficiale media è un processo termico **1D** corrispondente ad un riscaldamento uniforme

dove

$$\phi(0, 0) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

Some classic solutions to 1D heat transfer problems

	$h^H=0$	$\frac{T}{QL/K} = Fo + \frac{3(1-Z)^2-1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp(-n^2\pi^2 Fo) \cos[n\pi(1-Z)];$ $Fo = \alpha\tau / L^2; \quad Z = z/L$	7	$\frac{T}{QL/K} = Fo + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-n^2\pi^2 Fo)$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo);$ $\mu_n \text{ - positive roots of: } \mu \tan \mu = Bi; \quad Bi = hL/K$	8	$\frac{T}{Q/h} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo)$
	$h^H=0$	$\frac{T}{QL/K} = Fo_h + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} [e^{-n^2\pi^2 Fo} (e^{n^2\pi^2 Fo_h} - 1)] \times$ $\times \cos\left[\frac{n\pi}{L}(1-Z)\right]$	9	$\frac{T}{QL/K} = Fo_h + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [e^{-n^2\pi^2 Fo} (e^{n^2\pi^2 Fo_h} - 1)]$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{Q/h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \times$ $\times [\exp(\mu_n^2 Fo_h) - 1]$	10	$\frac{T}{Q/h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \times$ $\times [\exp(\mu_n^2 Fo_h) - 1]$
	$h^H=0$	$\frac{T}{W\alpha/KL} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi z \exp(-n^2 \pi^2 Fo)$	11	$\frac{T}{W\alpha/KL} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 Fo)$
	$h^H \neq 0$	$\frac{T}{W\alpha/KL} = \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{2 \sin \mu_n \cos[\mu_n(1-Z)]}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo)$	12	$\frac{T}{W\alpha/KL} = \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{2 \sin \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \times$ $\times \exp(-\mu_n^2 Fo)$

Note: • See solution in [1]
 •• Solution derived from those for step-function
 $\operatorname{erfc}x = 1 - \operatorname{erf}x$; $\operatorname{erf}(0) = 0$; $\operatorname{erf}(\infty) = 1$; $\operatorname{erfc}(0) = 1$; $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$

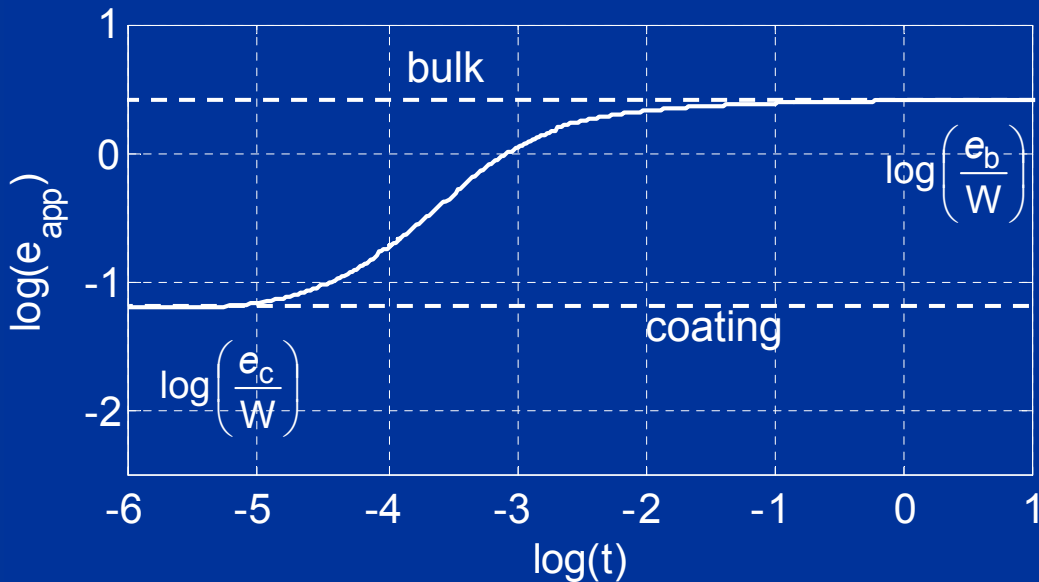
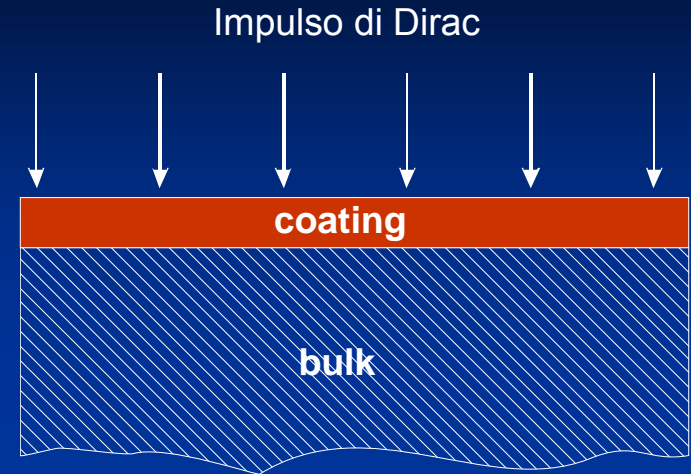
Effusività apparente

$$T(t) = \frac{W}{e \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Temperatura superficiale di un mezzo semi-infinito riscaldato con un impulso di Dirac

$$e_{app}(t) = \frac{e}{W} = \frac{1}{T(t)\sqrt{\pi \cdot t}}$$

Effusività apparente per un mezzo semi-infinito



$$T(t) = \frac{W}{e_c \cdot \sqrt{\pi \cdot t}} \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-\Gamma)^n e^{-\frac{n^2 L^2}{\alpha_c t}} \right)$$

$$e_{app}(L, t) = \frac{e_c}{W \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-\Gamma)^n e^{-\frac{n^2 L^2}{\alpha_c t}} \right)}$$

Esempio: misura della diffusività termica di rivestimenti termici depositati su pale di turbina

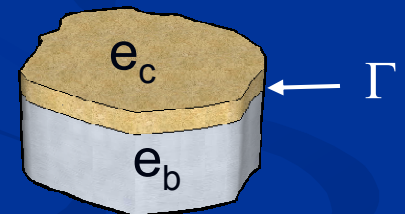
Modello analitico 1D:

- rivestimento di spessore L su substrato semi-infinito
- riscaldamento uniforme impulsivo (Dirac) senza scambio con l'ambiente (adiabatico)

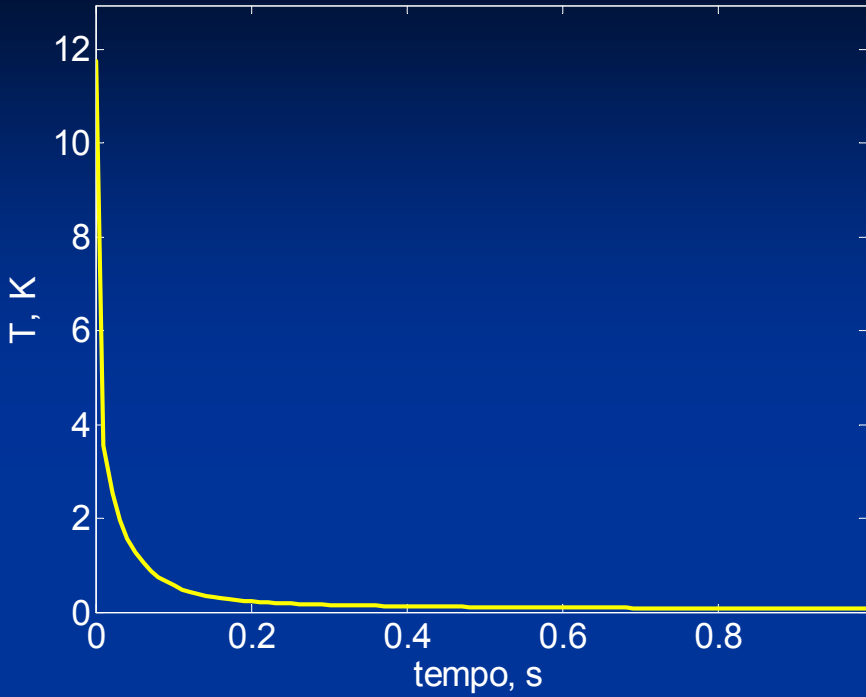
$$T(t) = \frac{W}{e_c \cdot \sqrt{\pi \cdot t}} \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-\Gamma)^n e^{-\frac{n^2 L^2}{\alpha_c t}} \right)$$

dove $\Gamma = \frac{e_b - e_c}{e_b + e_c}$ Fattore di riflessione all'interfaccia

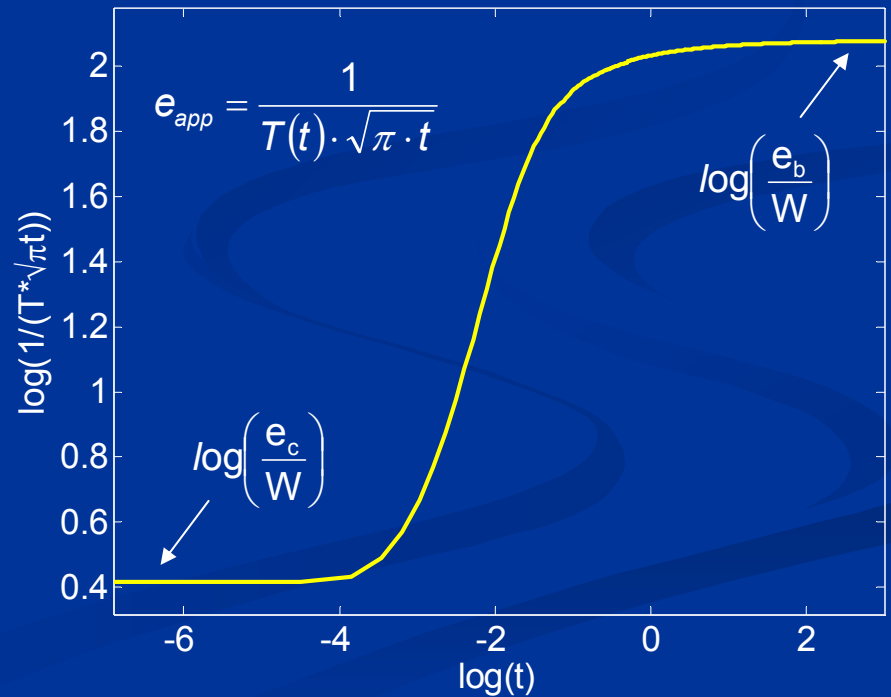
$$\Gamma = \frac{e_b - e_c}{e_b + e_c} \begin{cases} \Gamma=0 & \text{singolo strato } (e_b=e_c) \\ \Gamma=1 & \text{caso a temperatura imposta } (e_b \gg e_c) \\ \Gamma=-1 & \text{caso adiabatico } (e_b \ll e_c) \end{cases}$$



Andamento della temperatura nel tempo



Rappresentazione bi-logaritmica



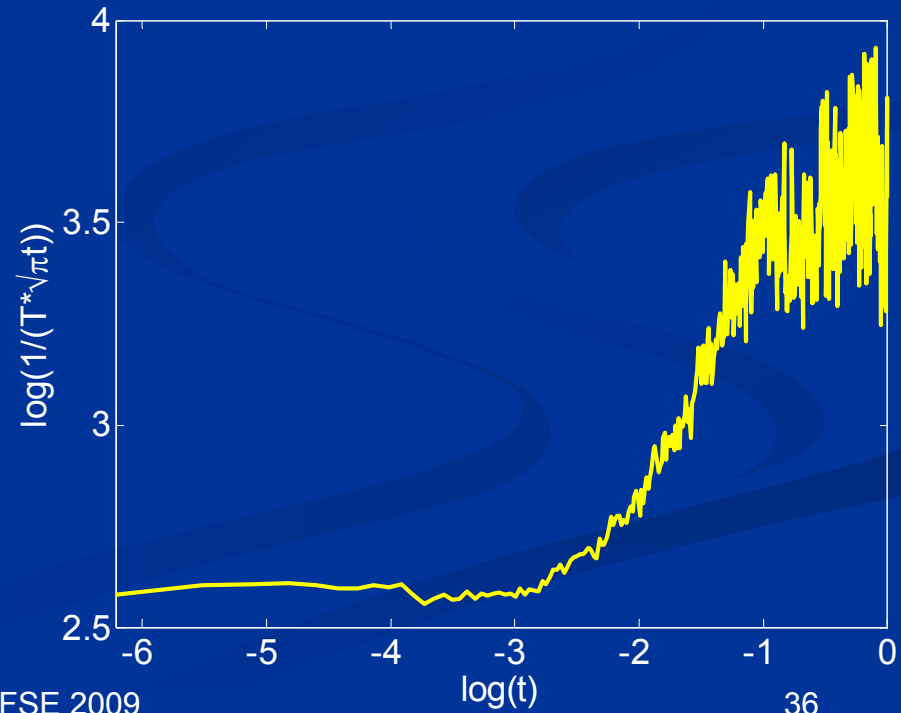
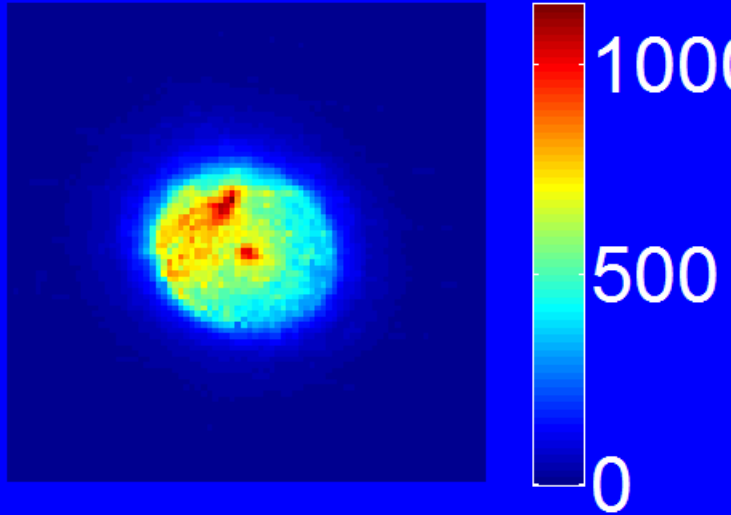
Non-linear Best fit

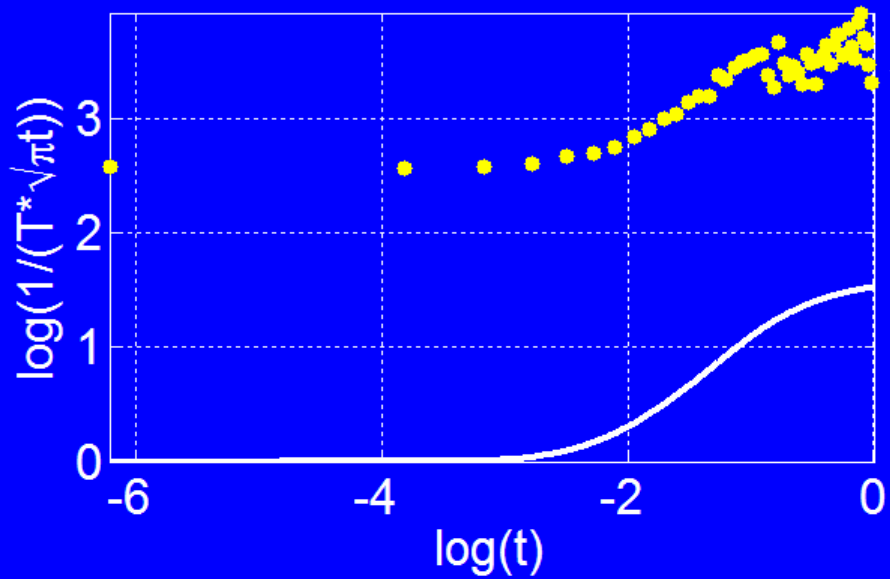
$$T(t) = \frac{W}{e_c \cdot \sqrt{\pi} \cdot t} \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-\Gamma)^n e^{-\frac{L^2 n^2}{\alpha_c t}} \right)$$

Parametri

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{W}{e_c} & \Gamma & \frac{\alpha_c}{L^2} \end{array} \right]$$

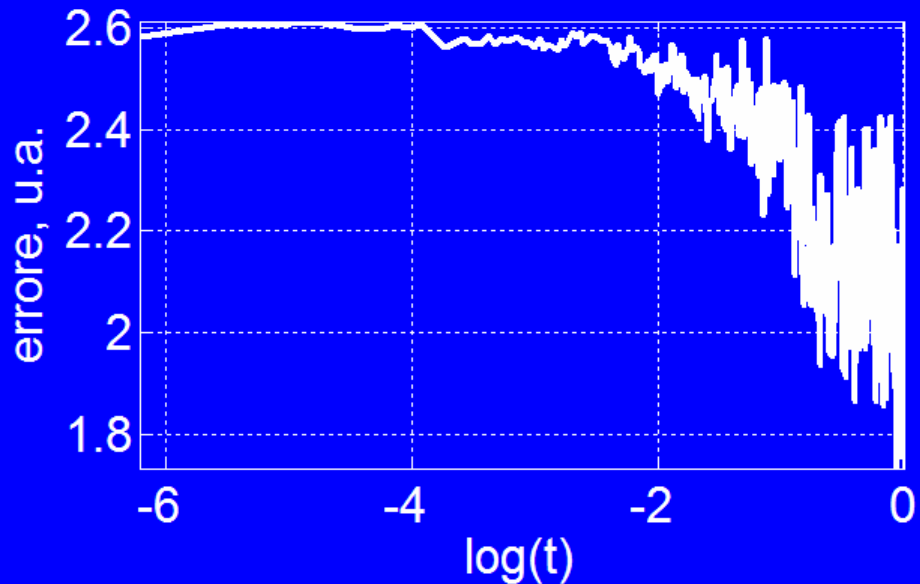
Immagine al tempo t= 0.00 s





dati sperimentali

Stima iniziale
 $X_0 = [W/e_c \quad \Gamma \quad \alpha_c/L^2]$



Parametri stimati

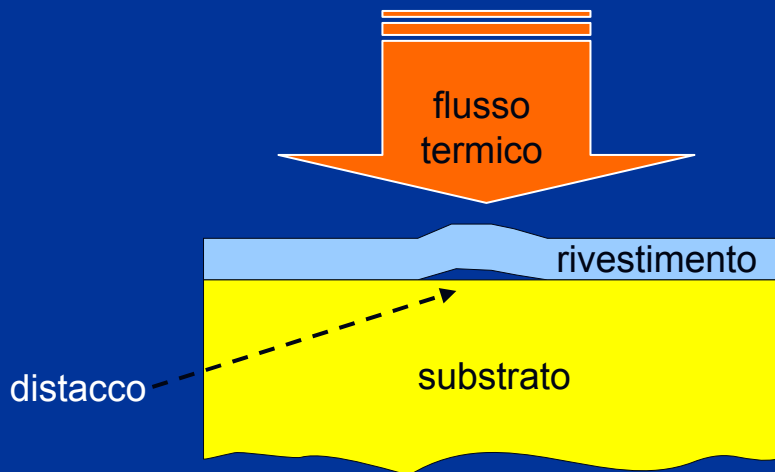
$W/e_c = 0.075 \text{ Ks}^{-1/2}$

$\Gamma = 0.53$

$\alpha_c/L^2 = 0.47 \text{ s}^{-1}$

Rilevazione di distacchi

- Una tipica applicazione della termografia infrarossa è l'analisi dello stato di adesione dei rivestimenti
- Problema inverso: **temperatura** → **geometria**
- Il distacco agisce come una **resistenza termica** aggiuntiva che si oppone al passaggio di calore causando in superficie una zona a temperatura più alta (*hot spot*)



- La rilevazione qualitativa di tali difetti non presenta particolari difficoltà nel caso di superfici sufficientemente uniformi dal punto di vista dell'assorbimento dello stimolo termico

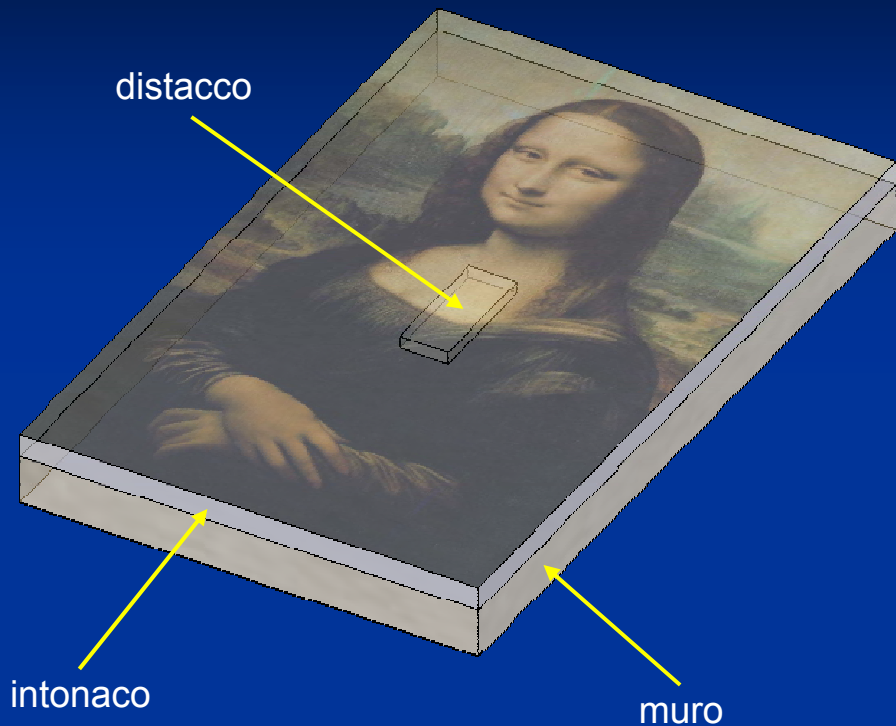
Rilevazione di distacchi su pareti dipinte

- Nel caso dipinti, lo stimolo termico applicato viene assorbito in modo diverso da zone aventi pigmenti con differenti proprietà di assorbimento a certe lunghezze d'onda
- Il diverso assorbimento da punto a punto della superficie induce nel campione in esame un processo termico transitorio tridimensionale, non trattabile con modelli analitici
- L'utilizzo di un modello numerico in questo caso risulta indispensabile sia in fase di messa a punto dell'esperimento, sia nella successiva fase di elaborazione dei dati
- La complessità del modo in cui il calore si propaga all'interno del materiale rende difficoltosa la rilevazione della presenza di possibili difetti sotto forma di distacchi dello strato dipinto dal muro sottostante

Analisi preliminare del problema

- Modello numerico privo di difetti al fine di ottenere la dinamica di propagazione del calore dovuta esclusivamente alla disuniformità superficiale del coefficiente di assorbimento
- Modello numerico con difetto per la simulazione completa del processo termico reale
- Estrazione di una sequenza di immagini per ogni modello, relativa alla faccia del dominio corrispondente a quella riscaldata e osservata dalla termocamera
- Combinazione delle due sequenze al fine di evidenziare il difetto separandolo dai “*falsi allarmi*” causati dai diversi pigmenti del dipinto
- Applicazione dell’analisi preliminare ai risultati sperimentali

Analisi del problema attraverso modelli numerici semplificati



Fase 1: simulazione dell'effetto di diffusione del calore dovuto al dipinto. Il modello è una lastra piana con le caratteristiche termo-fisiche di un intonaco sovrapposta ad un'altra lastra piana con le caratteristiche di un muro.

Fase 2: simulazione del processo di diffusione del calore dovuto sia al dipinto che alla presenza di un difetto rappresentato da un cava sulla faccia posteriore della lastra superiore (intonaco).

La caratteristica principale di questa analisi consiste nella **condizione al contorno** imposta sulla faccia dipinta.

I diversi coefficienti di assorbimento dello stimolo termico avranno l'effetto di mascherare il segnale prodotto dal difetto.

Le condizioni al contorno: distribuzione dello stimolo termico nel piano

Per simulare in prima approssimazione la mappa dei coefficienti di assorbimento CA a partire dal dipinto G (matrice $M \times N$), in linea di principio si normalizzano i livelli di grigio e si assegna al valore di grigio 0 (colore nero) il coefficiente 1 e al valore di grigio 1 (colore bianco) un coefficiente nullo.



dipinto



coefficienti di
assorbimento



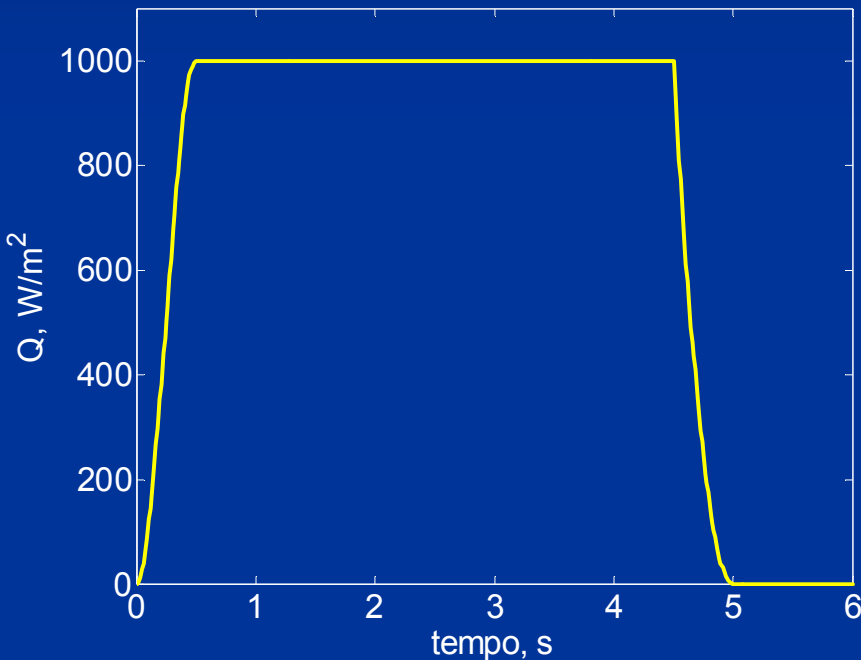
$$G_n(i, j) = G(i, j) / \max(G(i, j), i = 1..M, j = 1..N)$$

$$CA(i, j) = 1 - G_n(i, j)$$

Utilizzando una procedura di interpolazione si ricava la funzione $f(x, y)$ dei coefficienti di attenuazione dello stimolo termico. Tale funzione servirà da **maschera** per determinare in ogni punto della superficie riscaldata la corrispondente densità di potenza assorbita.

Le condizioni al contorno: andamento temporale dello stimolo termico

L'utilizzo di riscaldamenti di breve durata su questo tipo di materiali, richiederebbe energie molto elevate non disponibili nella pratica. Si usano perciò lampade di media potenza (dell'ordine di alcuni kW) per produrre un riscaldamento della durata di alcuni secondi.

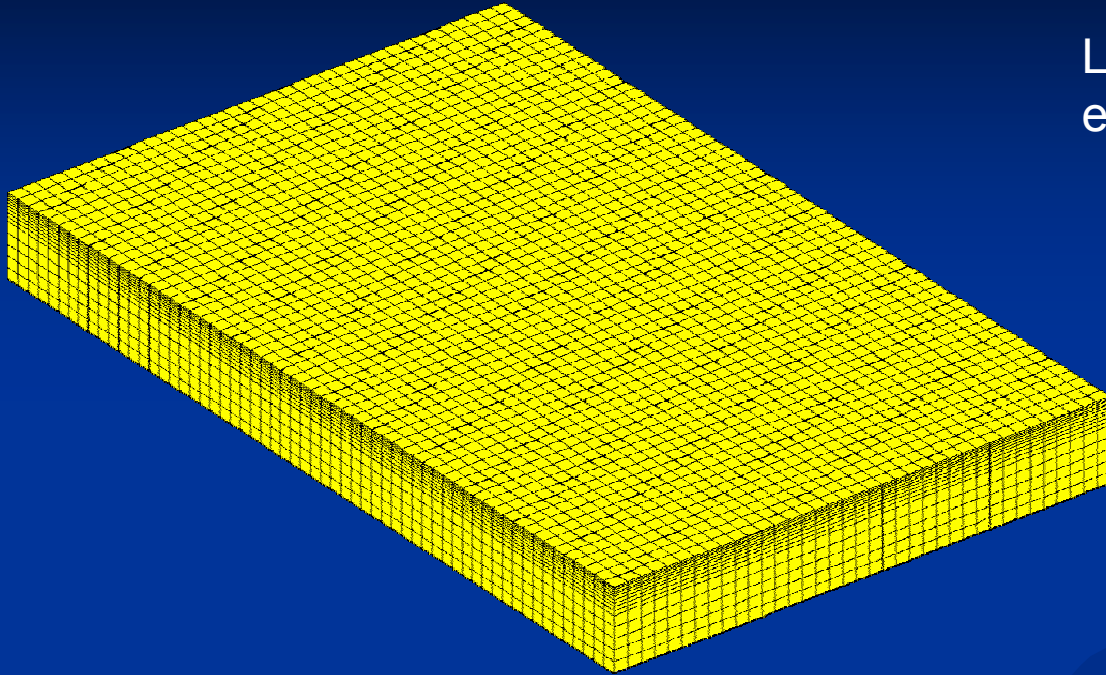


La durata totale dell'impulso $Q(t)$ utilizzato per la simulazione è di 5 s.

Per la forma dell'impulso si è usata la funzione di Heaviside con derivata prima continua per evitare difficoltà di convergenza del codice e tenere conto dei tempi di accensione e spegnimento delle lampade.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = f(x, y) \cdot Q(t)$$

La mesh



La mesh è di tipo '*mappato*' con elementi *parallelepipedi*.

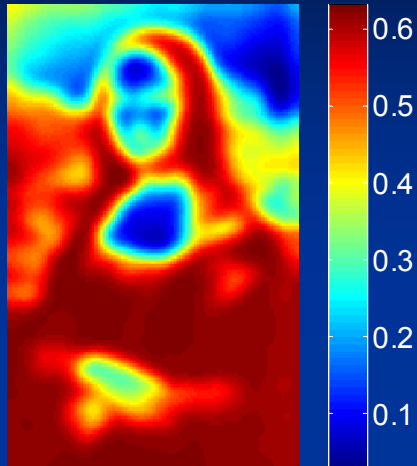
Nel primo strato di intonaco (spessore 1 cm, $\alpha=2.08 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) in profondità sono stati utilizzati 10 elementi distribuiti con altezza variabile esponenzialmente tenendo conto che dopo i 5 secondi di riscaldamento il fronte termico ha raggiunto una profondità di circa 3 mm.

Nel secondo strato (spessore 2 cm) sono stati utilizzati 5 elementi di altezza pari a 4 mm.

Risultati numerici

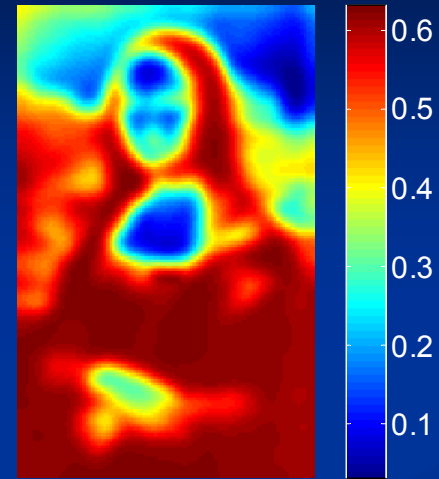
SANO (S)

Immagine al tempo t= 60.00 s



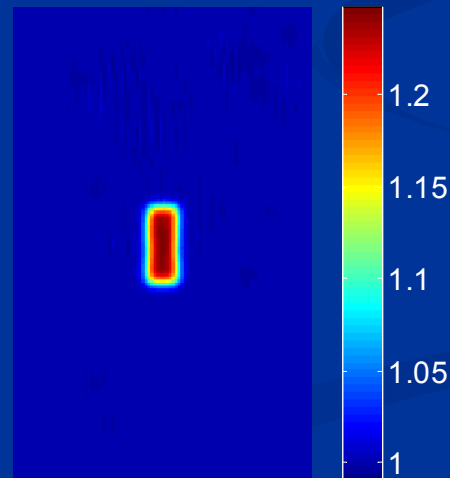
CON DIFETTO (D)

Immagine al tempo t= 60.00 s



CONTRASTO TERMICO (C)

Immagine al tempo t= 60.00 s



$$C(i,j) = \frac{D(i,j)}{S(i,j)}$$

Applicazione sperimentale

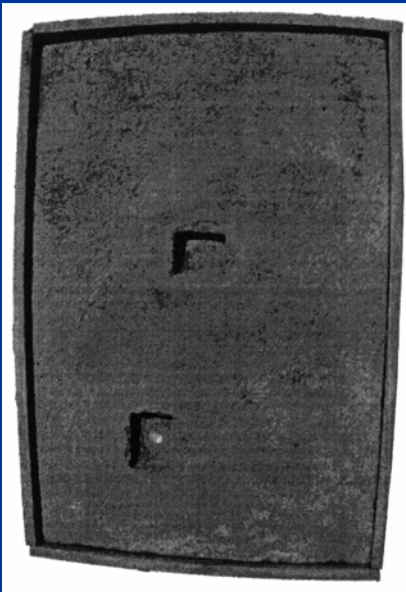


Il campione

- affresco realizzato su materiale multistrato noto con difetti artificiali.
- 2 difetti simulati con l'inserimento di spugna tra 2 strati consecutivi di intonaco
- 2 difetti simulati scavando 2 cave tra l'intonaco e il muro

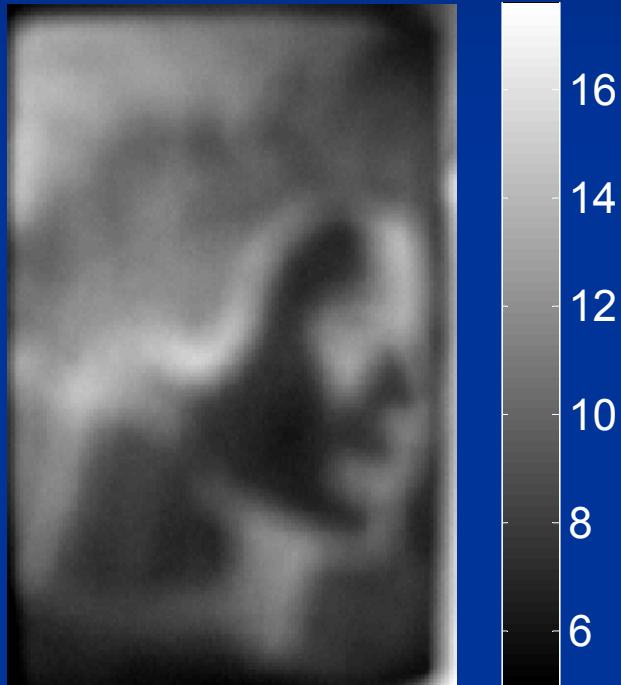
La procedura

- riscaldamento del campione e acquisizione della sequenza di termogrammi
- individuazione del termogramma da utilizzare per ricavare la mappa dei coefficienti di assorbimento nella banda di interesse
- modello numerico e sequenza simulata
- rapporto tra sequenza sperimentale e simulata
- elaborazione della sequenza ottenuta

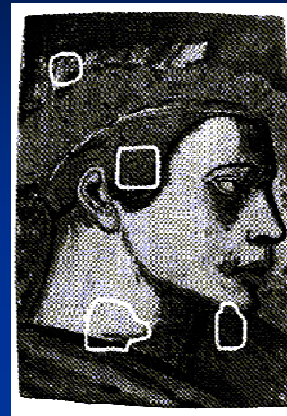


Risultati sperimentali

Immagine al tempo $t = 40.12$ s



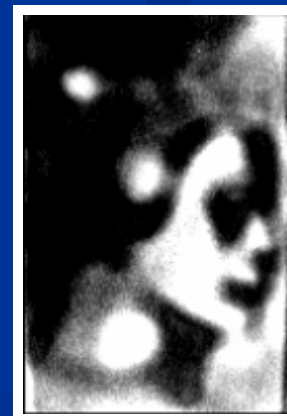
fotografia



termogramma a 270 s



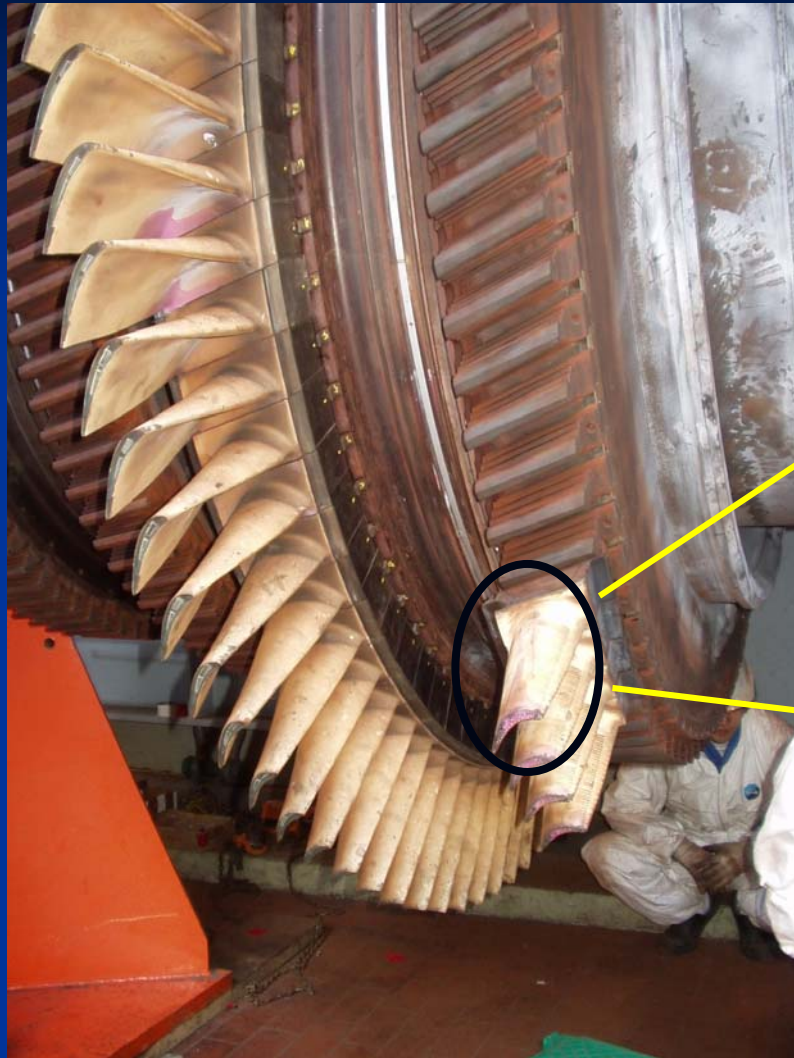
maxigramma



maxigramma elaborato (3D)

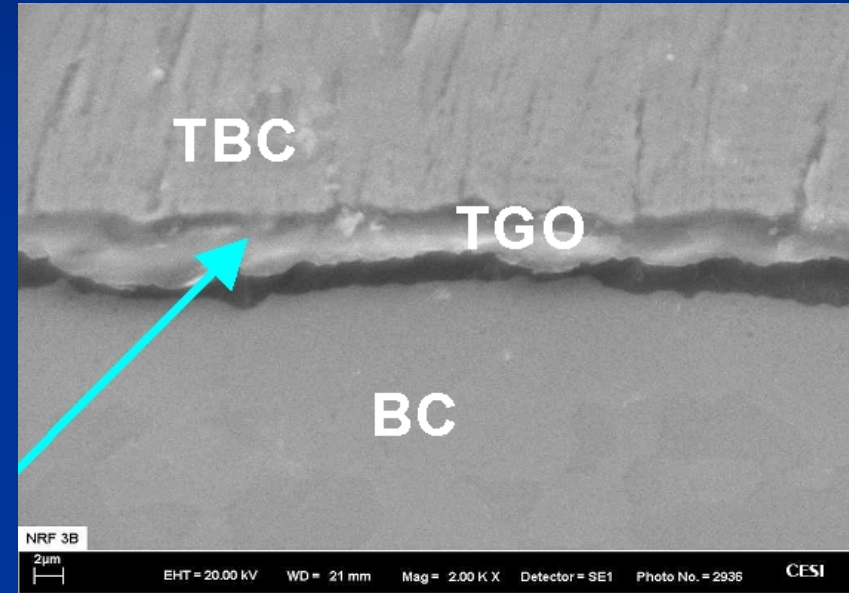
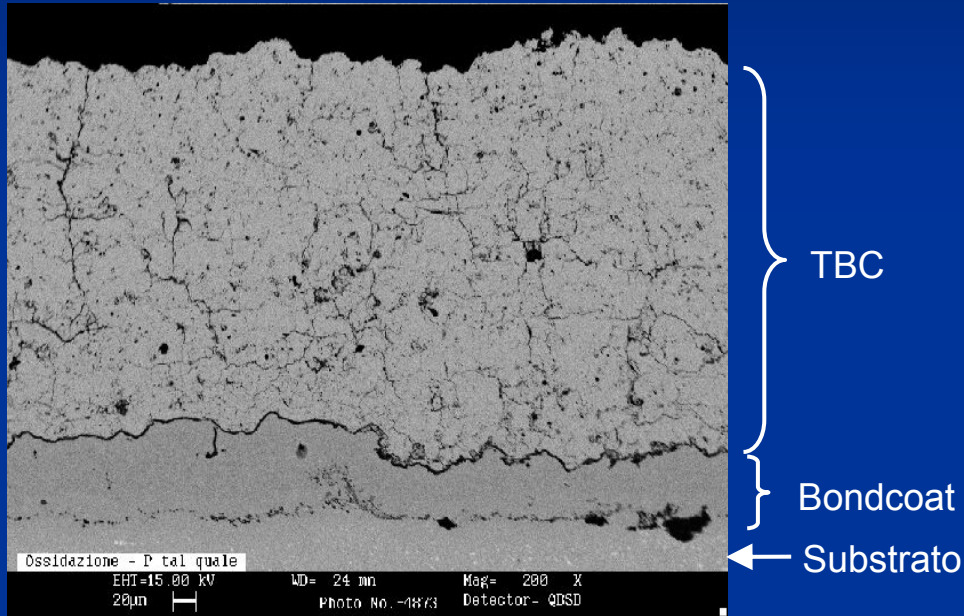


Thermal Barrier Coatings (rivestimenti termici)



Fonte: Dott. F. Cernuschi (ERSE S.p.A.)

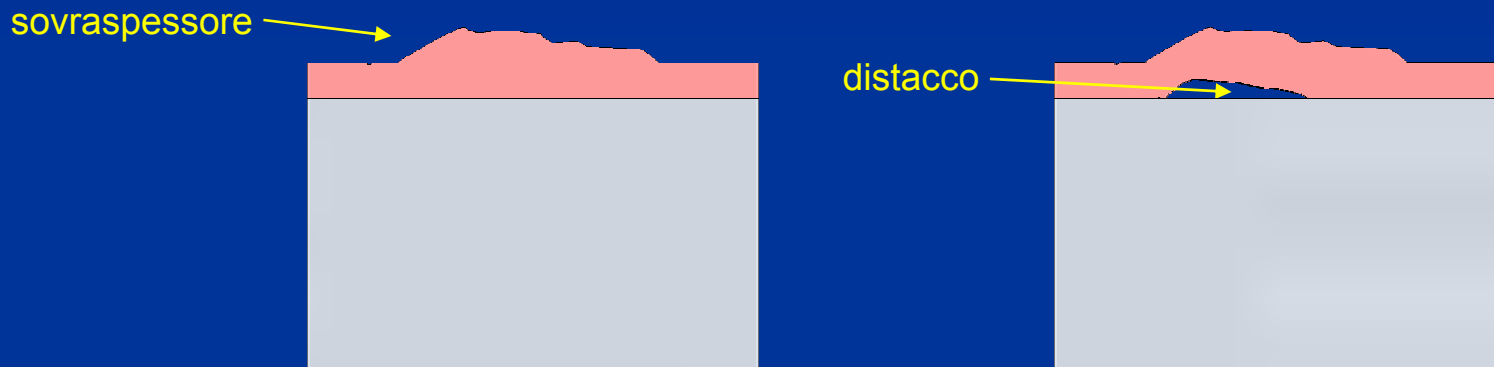
TBC al microscopio



Fonte: Dott. F. Cernuschi (ERSE S.p.A.)

Discriminazione tra sovrasspessori e distacchi del rivestimento

Tipicamente la deposizione di barriere termiche su pale di turbina avviene con procedure che non assicurano la deposizione di uno strato con spessore uniforme. A volte inoltre zone particolari della pala maggiormente esposte ad usura vengono protette con spessori maggiori di rivestimento.

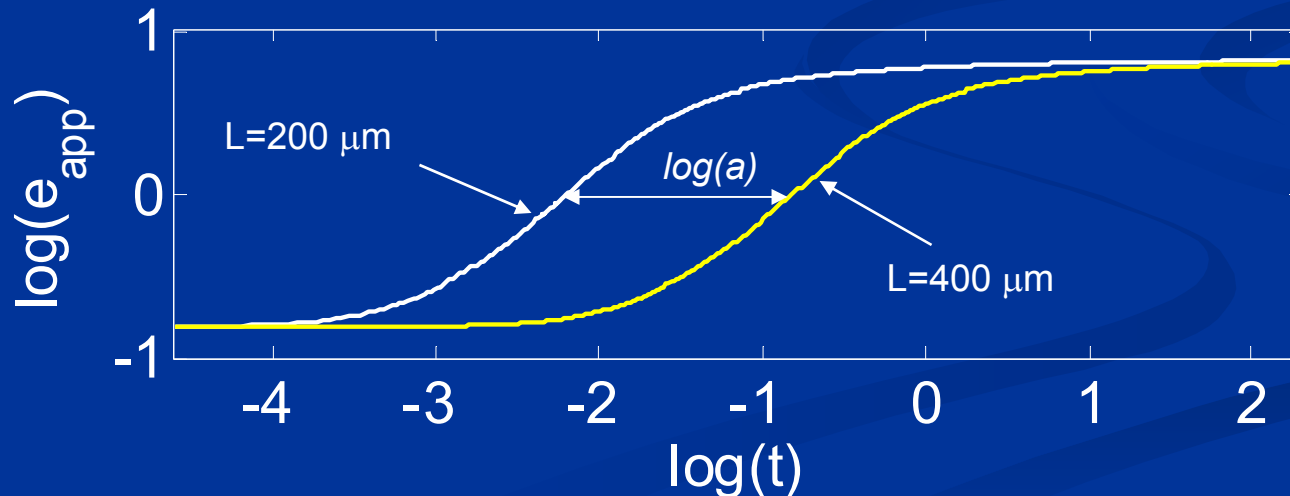


Nei test termici dinamici sia il sovrasspessore che il distacco rappresentano una resistenza termica aggiuntiva e quindi danno origine a zone con temperatura superficiale più alta. L'obiettivo è quello di discriminare i due casi che, dal punto di vista della prevenzione, vanno trattati in modo diverso.

Effetto di un sovrappessore sull'effusività apparente

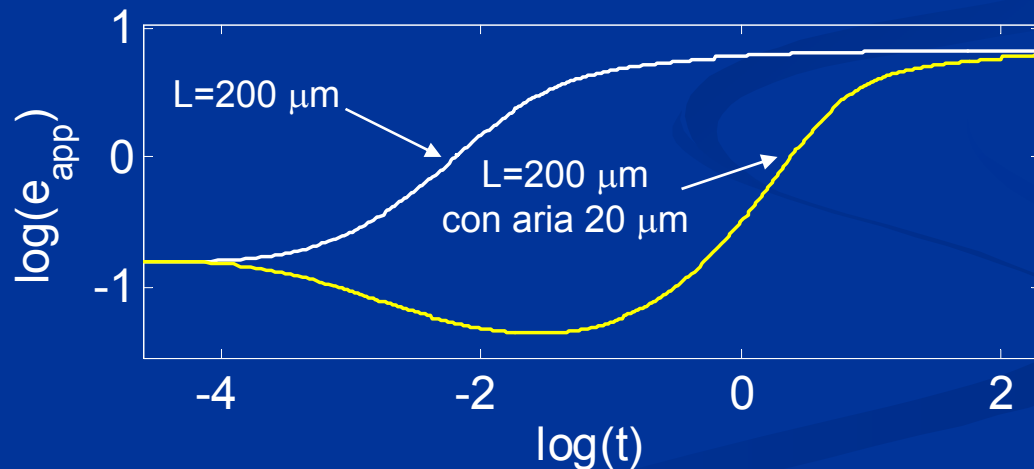
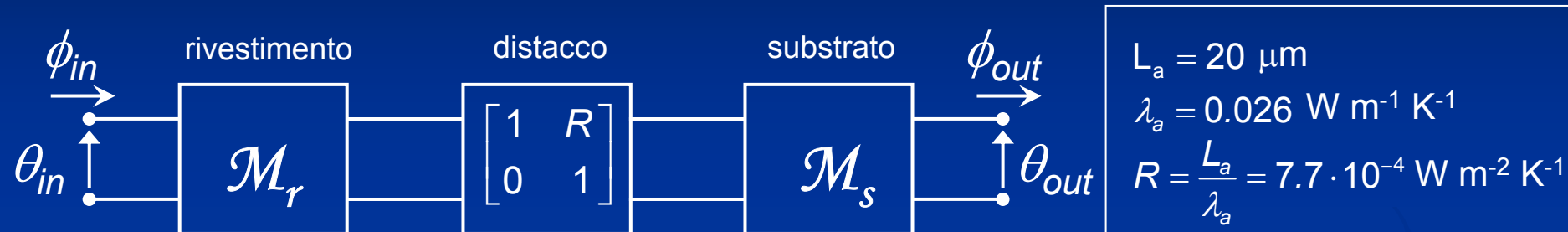
$$e_{app}(L + \Delta L, t) = \frac{e_c}{W \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-\Gamma)^n e^{-\frac{n^2(L+\Delta L)^2}{\alpha_c t}} \right)} = e_{app}(L, a \cdot t) \quad \text{con} \quad a = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta L}{L} \right)^2}$$

L'effetto di una variazione di spessore ΔL è equivalente ad una **compressione/dilatazione** dell'asse dei tempi di un fattore a . Nel piano Log-Log, questo effetto si manifesta come una **traslazione** pari a $\log(a)$.



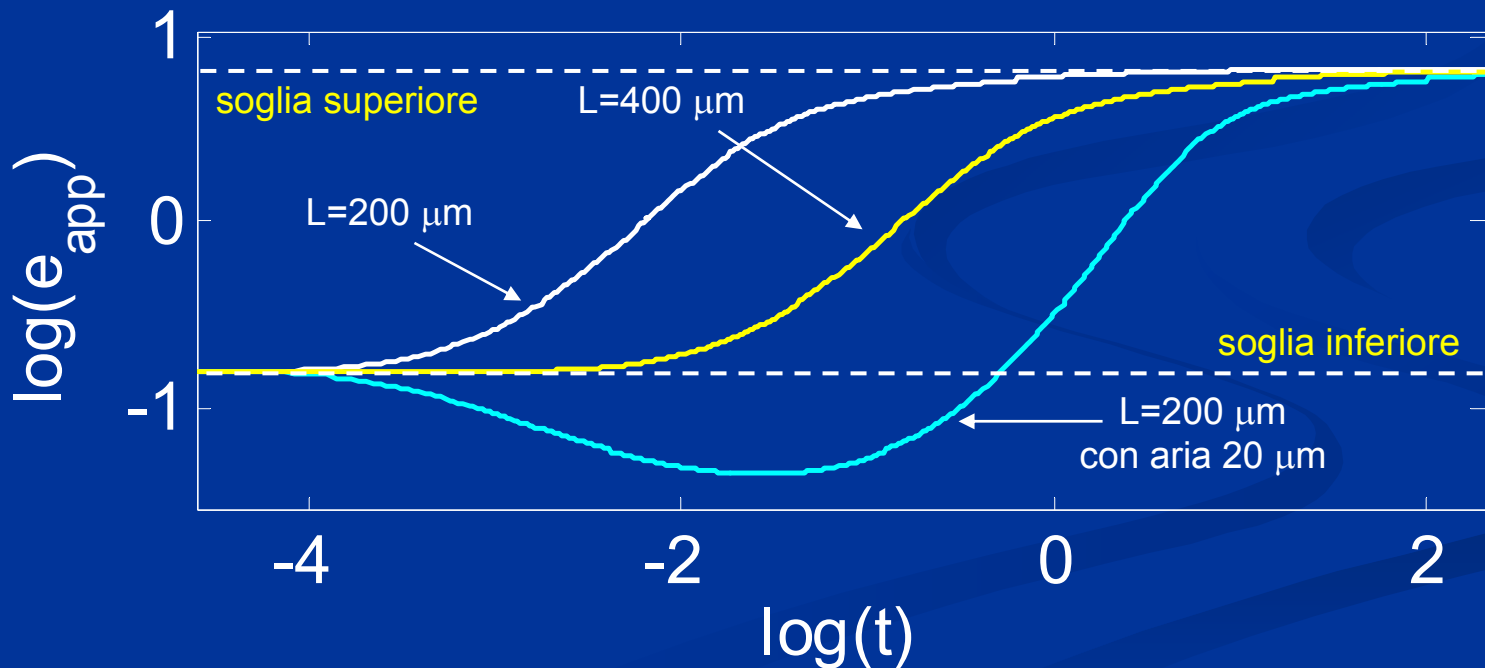
Simulazione dell'effetto di un distacco sull'effusività apparente

Con il metodo dei quadrupoli e possibile simulare la presenza di una lama d'aria sottile (resistenza termica $R=L_a/\lambda_a$) tra il rivestimento e il substrato.



Primo criterio di discriminazione: sogliatura riferita al primo campione

- Nel caso di perfetta aderenza, si ha inizialmente un valore di $\log(e_{app})$ legato all'effusività del rivestimento con successiva tendenza ad un valore maggiore corrispondente all'effusività del substrato metallico.
- Quindi nel caso di perfetta aderenza, le curve sono monotone non decrescenti e traslano orizzontalmente rimanendo sempre confinate nella regione delimitata dai due asintoti.
- La presenza di aria si nota dalla tendenza iniziale ad un valore inferiore di effusività, portando la curva ad abbassarsi sotto la soglia inferiore



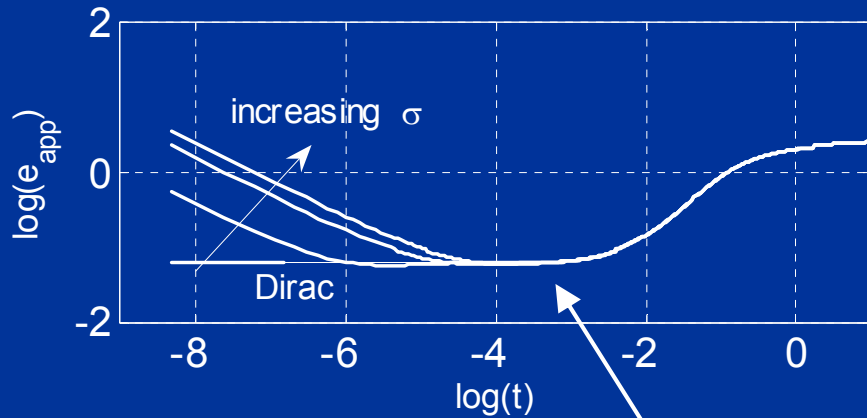
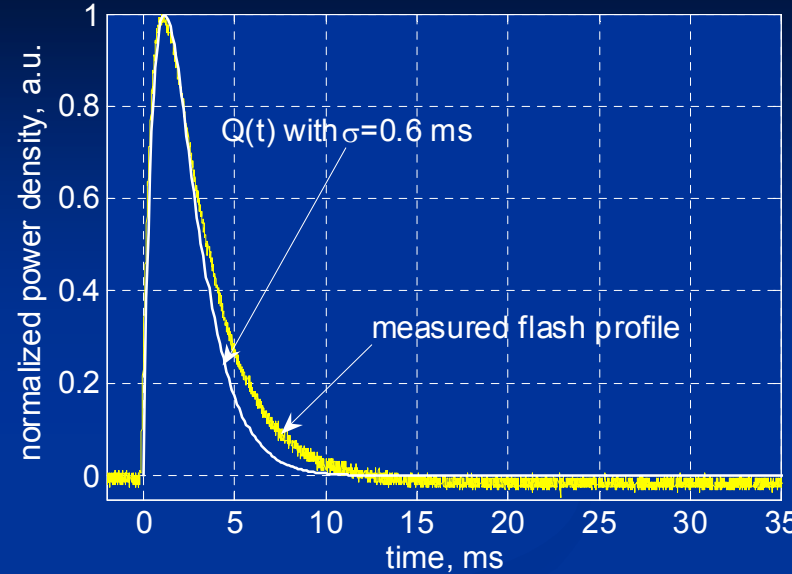
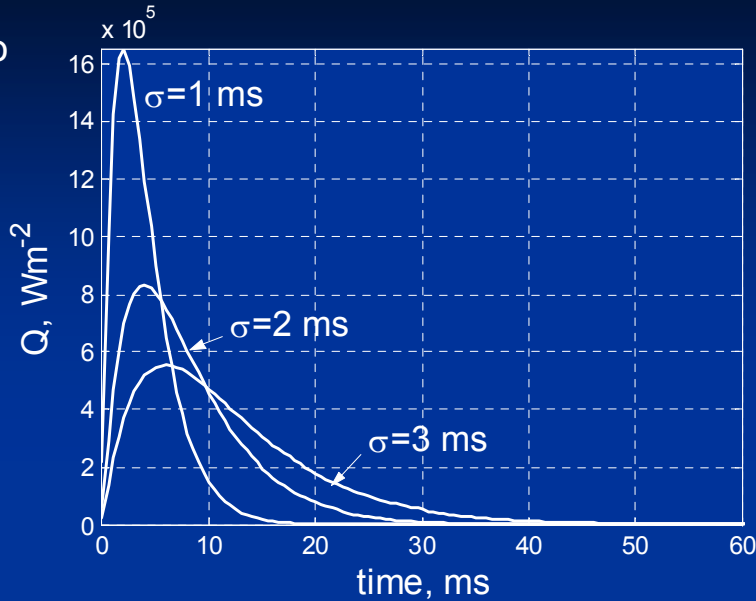
Effetto della durata finita del riscaldamento

Forma dell'impulso

$$Q(t) = \frac{W_0 \cdot t}{4\sigma^2} e^{-\frac{t}{2\sigma}}$$



$$Q(s) = \frac{W_0}{(1 + 2s \cdot \sigma)^2}$$



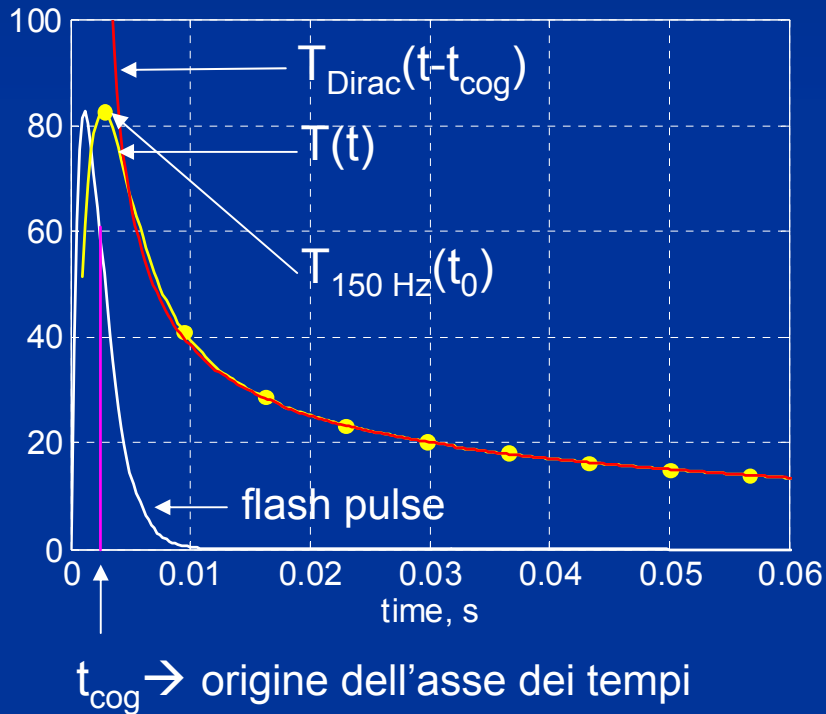
Comparsa di un minimo globale

- Maggiore è la durata del riscaldamento, maggiore è la distorsione della parte iniziale della curva.
- Perdita del valore iniziale a cui attribuire la soglia inferiore

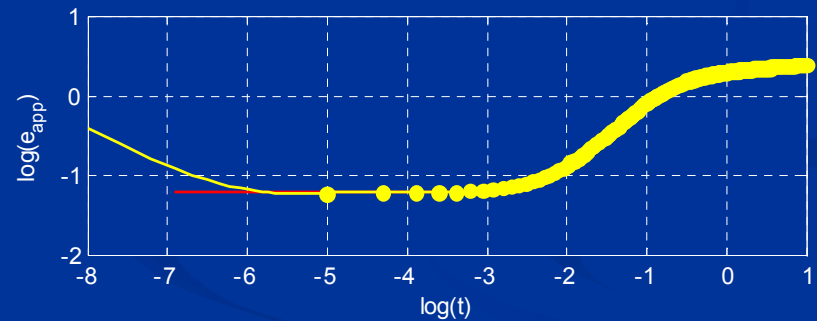
Effetto di una non perfetta sincronizzazione tra l'acquisizione e lo stimolo termico

Frequenza di campionamento 150 Hz e ritardo di 0 ms

Profili di temperatura



Profili di effusività apparente

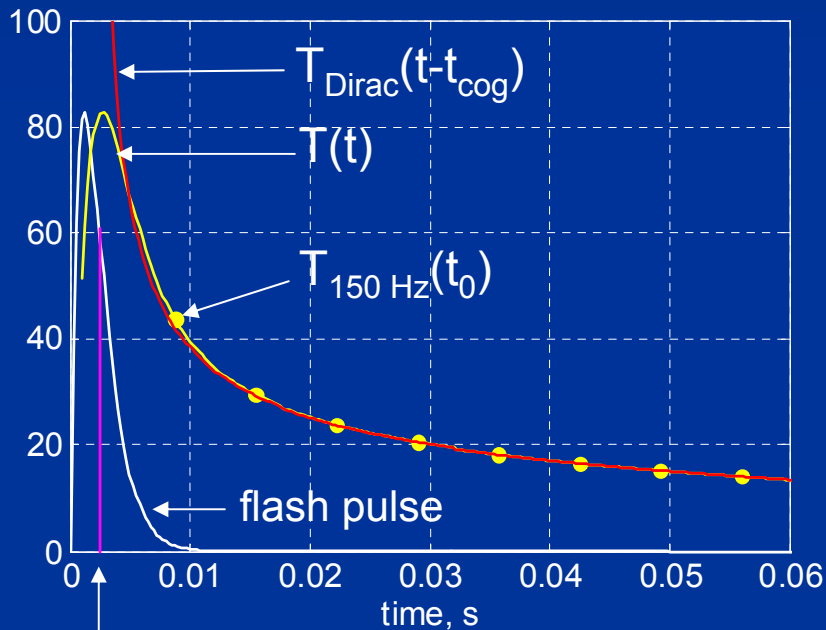


Effetto di una non perfetta sincronizzazione tra l'acquisizione e lo stimolo termico

Frequenza di campionamento 150 Hz e ritardo di 6 ms

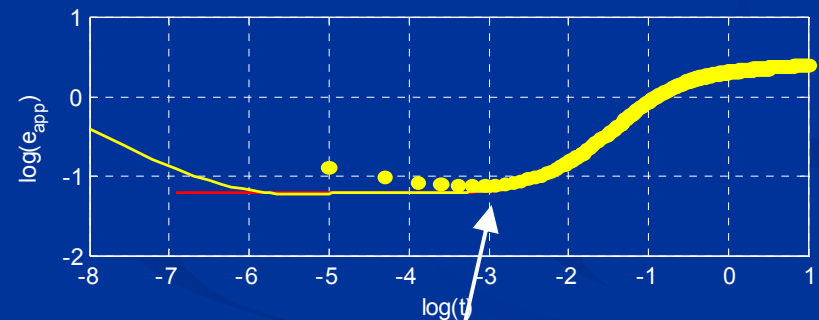


Profili di temperatura



t_{cog} → origine dell'asse dei tempi

Profili di effusività apparente



Comparsa di un minimo globale nella curva campionata (perdita del valore di riferimento per la soglia)

Criterio di discriminazione basato sul tempo del minimo

- Il valore del minimo non può essere preso in considerazione come parametro affidabile in quanto fortemente dipendente dall'intensità locale del riscaldamento
- Simulazioni numeriche hanno dimostrato che, nei casi di interesse pratico, il minimo globale dovuto alla durata finita dell'impulso e/o alla non perfetta sincronizzazione dell'acquisizione con il sistema di riscaldamento, si manifesta sempre molto prima del minimo dovuto alla presenza di distacco.
- Il tempo al quale si verifica il minimo globale della curva bilogaritmica dell'effusività apparente è stato scelto come criterio di discriminazione tra sovrassessori e distacchi

Risultati sperimentali (1)

frequenza di acquisizione: 150 Hz

Immagine dei minimi
di $\log(e_{app})$

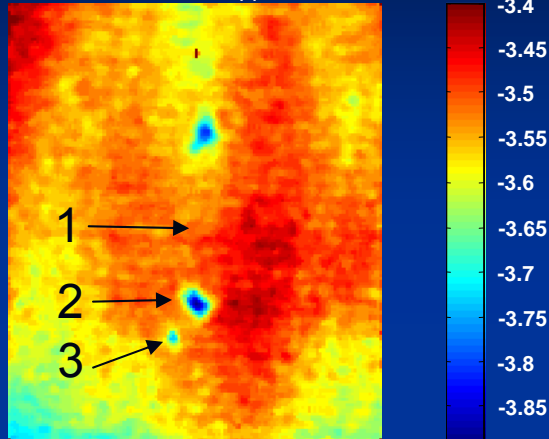
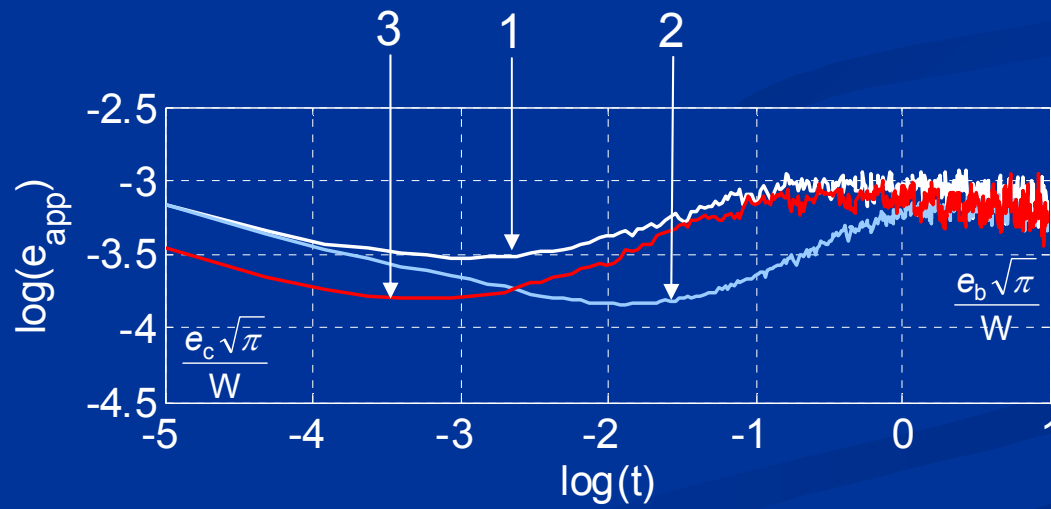
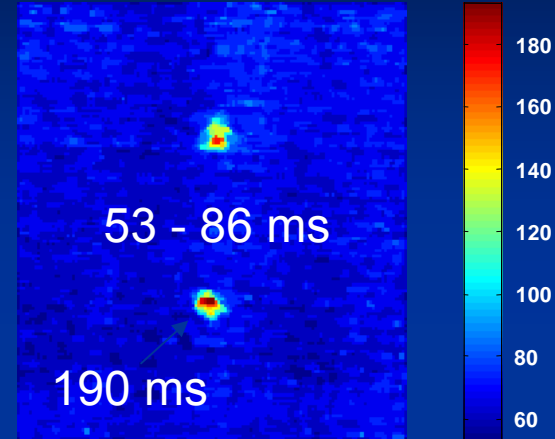


Immagine dei tempi del
minimo di $\log(e_{app})$



Risultati sperimentali (2)

frequenza di acquisizione: 1000 Hz

Immagine dei minimi
di $\log(e_{app})$

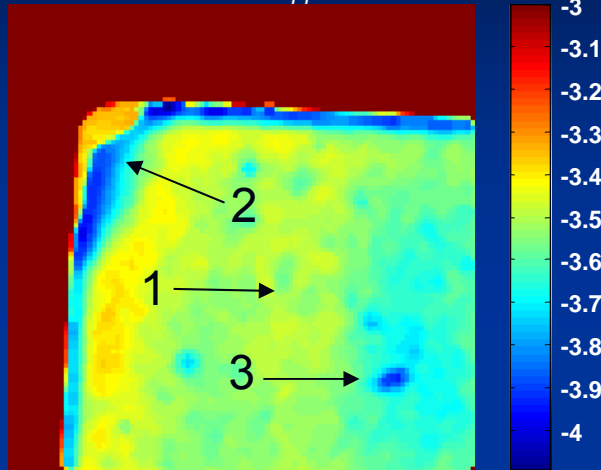
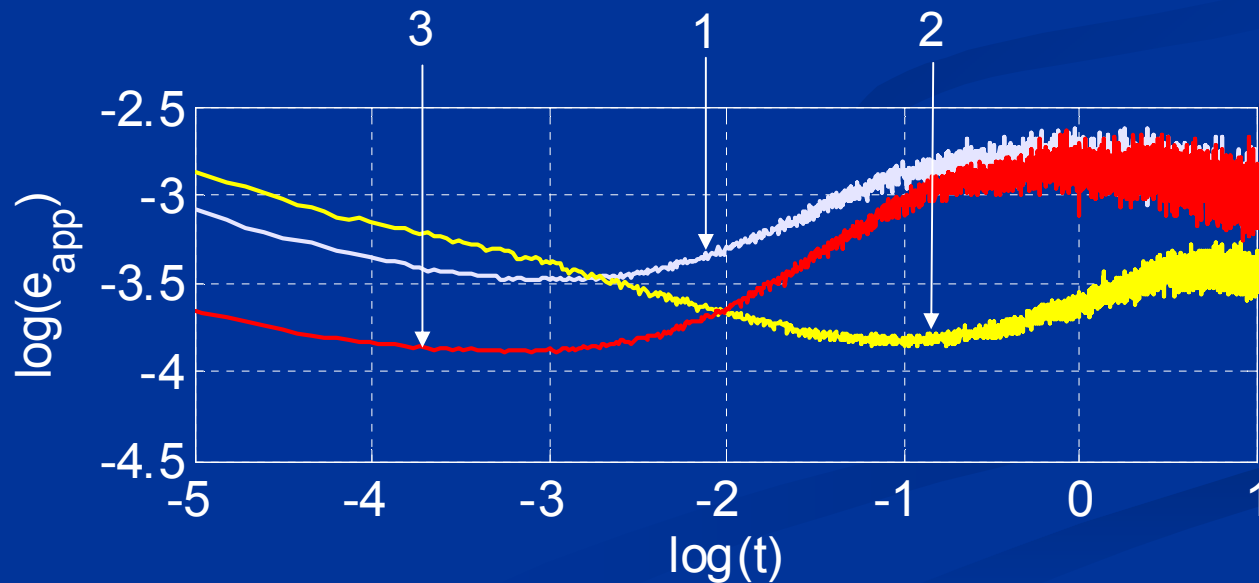
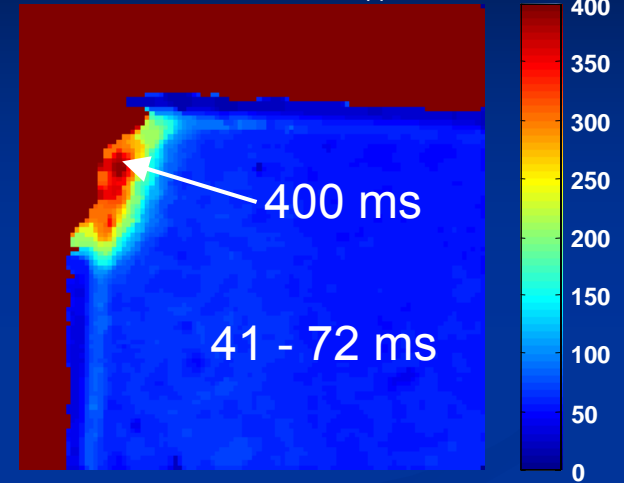


Immagine dei tempi del
minimo di $\log(e_{app})$



Risultati sperimentali (3)

frequenza di acquisizione: 50 Hz

Immagine dei minimi di $\log(e_{app})$

Immagine dei tempi del minimo di $\log(e_{app})$

