

ANALISI MATEMATICA 1
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Tema 1

Esercizio 1 [4 punti]

Verificare che la disuguaglianza $\phi(x) = e^{x^2} - e^{-x} + 100 > 0$ è verificata per ogni $x \in [0, +\infty[$

Esercizio 2 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(e^{x^2} - e^{-|x|} + 100)$$

[Studiare dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

[*Suggerimento:* Usare il risultato dell'Esercizio 1 per studiare il dominio.]

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $] - a, a[$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \frac{e^{-y^2}}{y} t^5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Quesito 1 [7 punti]

Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

Quesito 2 [4 punti]

Enunciare (senza dimostrazione) il teorema dei valori intermedi.

Quesito 3 [5 punti]

Enunciare il criterio di Leibniz per serie a segno alterno, e dare un esempio di una serie convergente ma non assolutamente convergente.

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Tema 2

Esercizio 1 [4 punti]

Verificare che la disuguaglianza $\phi(x) = e^{4x^2} - e^{-2x} + 80 > 0$ è verificata per ogni $x \in [0, +\infty[$

Esercizio 2 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(e^{4x^2} - e^{-|2x|} + 80)$$

[Studiare dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

[*Suggerimento:* Usare il risultato dell'Esercizio 1 per studiare il dominio.]

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $] - a, a[$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = (5 + y^2)t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quesito 1 [7 punti]

Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

Quesito 2 [4 punti]

Enunciare (senza dimostrazione) il teorema della media integrale.

Quesito 3 [5 punti]

Si enunci la condizione di Cauchy per la convergenza (in \mathbb{R}) di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si dia un esempio in cui tale condizione non è verificata.

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Tema 3

Esercizio 1 [4 punti]

Verificare che la disuguaglianza $\phi(x) = e^{x^2/4} - e^{-x/2} + 87 > 0$ è verificata per ogni $x \in [0, +\infty[$

Esercizio 2 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{x^2/4} - e^{-|x/2|} + 87}$$

[Studiare dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

[*Suggerimento:* Usare il risultato dell'Esercizio 1 per studiare il dominio.]

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $] - a, a[$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = (2 + y^2)(2 + \cos t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quesito 1 [7 punti]

Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

Quesito 2 [4 punti]

Enunciare (senza dimostrazione) la regola di derivazione della funzione composta.

Quesito 3 [5 punti]

Nell'ambito delle serie a termini positivi, enunciare il criterio del rapporto. Stabilire se tale criterio fornisce informazioni per le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Tema 4

Esercizio 1 [4 punti]

Verificare che la disuguaglianza $\phi(x) = e^{x^2/9} - e^{-x/3} + 101 > 0$ è verificata per ogni $x \in [0, +\infty[$

Esercizio 2 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{x^2/9} - e^{-|x/3|} + 101}$$

[Studiare dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

[*Suggerimento:* Usare il risultato dell'Esercizio 1 per studiare il dominio.]

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $] - a, a[$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = (y^{-1}e^{-2y^2})t^5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Quesito 1 [7 punti]

Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Quesito 2 [4 punti]

Enunciare (senza dimostrazione) il teorema della media integrale.

Quesito 3 [5 punti]

Si enunci una condizione necessaria per la convergenza di una serie e si dia un esempio dove tale condizione è verificata ma la serie è divergente.

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.