ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Terzo appello - 24.6.2011

Seconda prova - Tema 1

Esercizio 1 [6 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|} - e\right)$$

[Studiare dominio, simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, segno e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Sugg.: per lo studio del segno può essere utile sapere che $e^{\sqrt{3}} - e > 1$.

Esercizio 2 [5 punti]

Si dica, motivandolo, per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x^{\alpha^2+\alpha+1} + x^2)}\, dx$$

converge.

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $]-a, a[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{(1+t)e^t}{\operatorname{sen} y(t)} \\ \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$$

Quesito 1 [6 punti]

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dica cosa significa affermare che f *è integrabile* (secondo Cauchy-Riemann).

Quesito 2 [4 punti]

Si enunci il teorema di Lagrange.

Quesito 3 [6 punti]

Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si dimostri che se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]0,1[$, allora f è crescente in senso stretto. (Suggerimento : usare il teorema di Lagrange)

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Terzo appello - 24.6.2011

Seconda prova - Tema 2

Esercizio 1 [6 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e^{|2x+\sqrt{x^2-1}|} - e\right)$$

[Studiare dominio, simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, segno e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Sugg.: per lo studio del segno può essere utile sapere che $e^{\sqrt{3}} - e > 1$.

Esercizio 2 [5 punti]

Si dica, motivandolo, per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x^3+1}{\tan(x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^3)}\,dx$$

converge.

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $]-a,a[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{(2+3t)e^{t/2}}{\operatorname{sen}(y(t)/2)} \\ \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

Quesito 1 [5 punti]

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si enunci il teorema della media integrale.

Quesito 2 [4 punti]

Si enunci un teorema che colleghi i concetti derivabilità e integrabilità.

Quesito 3 [7 punti]

Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si dimostri che se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]0,1[$, allora f è costante. (Suggerimento : usare il teorema di Lagrange)

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Terzo appello - 24.6.2011

Seconda prova - Tema 3

Esercizio 1 [6 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e^{|x-\sqrt{(x/2)^2-1}|} - e\right)$$

[Studiare dominio, simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, segno e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Sugg.: per lo studio del segno può essere utile sapere che $e^{\sqrt{3}} - e > 1$.

Esercizio 2 [5 punti]

Si dica, motivandolo, per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^2+1)}{\operatorname{sen}(x^{\alpha^2+\alpha+1}) + x^3}\, dx$$

converge.

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $]1-\delta, 1+\delta[$, $\delta > 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{2te^t + e^t}{y^2(t)} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Quesito 1 [5 punti]

Si dia la definizione di serie convergente.

Quesito 2 [4 punti]

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dica cosa significa affermare che f *è invertibile.*

Quesito 3 [7 punti]

Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(x) > 1$ per ogni $x \in]0,1[$. Si dimostri che essa è invertibile e che, detta $g : f(]0,1[) \to]0,1[$ l'inversa, si ha $g'(y) \in]0,1[$, per ogni $y \in f(]0,1[)$.

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Terzo appello - 24.6.2011

Seconda prova - Tema 4

Esercizio 1 [6 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(e^{|x+\sqrt{(x/2)^2-1}|} - e\right)$$

[Studiare dominio, simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, segno e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Sugg.: per lo studio del segno può essere utile sapere che $e^{\sqrt{3}} - e > 1$.

Esercizio 2 [5 punti]

Si dica, motivandolo, per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\tan(1+x)}{\tan(x^{\alpha^2+\alpha+1}) + x^2}\, dx$$

converge.

Esercizio 3 [5 punti]

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $]1-\delta, 1+\delta[$, $\delta > 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{3te^t + 6e^t}{y^4(t)} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Quesito 1 [7 punti]

Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Quesito 2 [4 punti]

Enunciare il teorema di Weierstrass.

Quesito 3 [5 punti]

Si enunci una condizione sufficiente per la convergenza di una serie a termini di segno alterno.

Tempo a disposizione: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.