ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Quarto appello - 14.9.2011
Seconda prova - Tema 1

Esercizio 1 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(1 + \tan x)$$

[Studiare dominio, segno, simmetrie, periodicità, limiti ed eventuali asintoti, continuità; derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima; monotonia ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto; derivata seconda, convessità ed eventuali flessi; fornire un abbozzo del grafico.]

Sugg.: semplificare f' il più possibile prima di calcolare f''.

Esercizio 2 [4 punti]

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{t^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino $f(0)$ e $f'(0)$. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 0$.

Esercizio 3 [5 punti]

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 5 \\ x(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

- Si trovi la soluzione di (1) su tutto $\mathbb{R}$ e la si indichi con $\hat{x}(t)$;
- si verifichi che $\hat{x}(t)$ non ha un punto massimo;
- si trovi un numero L tale che $\hat{x}(t) \le L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quesito 1 [7 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(c) \to 2$ per $c \to +\infty$. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+2} f(t)\, dt\,.$$

Sugg.: applicare il teorema della media all'integrale.

Quesito 2 [3 punti]

Si dia un esempio di funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx > 0$$

Quesito 3 [6 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in x_0 e $y_0 = f(x_0)$, rispettivamente.

- Nel caso in cui $g \circ f$ sia derivabile in x_0 si ha

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \ldots$$

- Si fornisca un esempio.
- Potrebbe $g \circ f$ essere non derivabile in x_0?

Tempo a disposizione: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Quarto appello - 14.9.2011
Seconda prova - Tema 2

Esercizio 1 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left[1 + \tan(2x)\right]$$

[Studiare dominio, segno, simmetrie, periodicità, limiti ed eventuali asintoti, continuità; derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima; monotonia ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto; derivata seconda, convessità ed eventuali flessi; fornire un abbozzo del grafico.]

Sugg.: semplificare f' il più possibile prima di calcolare f''.

Esercizio 2 [4 punti]

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 2 + \int_1^x e^{t^2}\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino $f(1)$ e $f'(1)$. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 1$.

Esercizio 3 [5 punti]

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + 4 \\ x(0) = 1/2\,. \end{cases} \tag{2}$$

- Si trovi la soluzione di (2) su tutto $\mathbb{R}$ e la si indichi con $\hat{x}(t)$;
- si verifichi che $\hat{x}(t)$ non ha un punto massimo;
- si trovi un numero L tale che $\hat{x}(t) \leq L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quesito 1 [7 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(c) \to -3$ per $c \to +\infty$. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+3} f(t)\,dt\,.$$

Sugg.: applicare il teorema della media all'integrale.

Quesito 2 [3 punti]

Si dia un esempio di funzione $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-2}^{2} f^4(x)\,dx > 0$$

Quesito 3 [6 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in x_0 e $y_0 = f(x_0)$, rispettivamente.

- Nel caso in cui $g \circ f$ sia derivabile in x_0 si ha

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \ldots$$

- Si fornisca un esempio.
- Potrebbe $g \circ f$ essere non derivabile in x_0?

Tempo a disposizione: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Quarto appello - 14.9.2011
Seconda prova - Tema 3

Esercizio 1 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left[1 + \tan(x/2)\right]$$

[Studiare dominio, segno, simmetrie, periodicità, limiti ed eventuali asintoti, continuità; derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima; monotonia ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto; derivata seconda, convessità ed eventuali flessi; fornire un abbozzo del grafico.]

Sugg.: semplificare f' il più possibile prima di calcolare f''.

Esercizio 2 [4 punti]

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 3 + \int_2^x e^{t^2}\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino $f(2)$ e $f'(2)$. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 2$.

Esercizio 3 [5 punti]

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -21x(t) + 5 \\ x(0) = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

- Si trovi la soluzione di (3) su tutto $\mathbb{R}$ e la si indichi con $\hat{x}(t)$;
- si verifichi che $\hat{x}(t)$ non ha un punto massimo;
- si trovi un numero L tale che $\hat{x}(t) \le L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quesito 1 [7 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(c) \to 4$ per $c \to -\infty$. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{x+4} f(t)\,dt\,.$$

Sugg.: applicare il teorema della media all'integrale.

Quesito 2 [3 punti]

Si dia un esempio di funzione $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-3}^{3} |f(x)|\,dx > 0$$

Quesito 3 [6 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in x_0 e $y_0 = f(x_0)$, rispettivamente.

- Nel caso in cui $g \circ f$ sia derivabile in x_0 si ha

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \ldots$$

- Si fornisca un esempio.
- Potrebbe $g \circ f$ essere non derivabile in x_0?

Tempo a disposizione: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Quarto appello - 14.9.2011
Seconda prova - Tema 4

Esercizio 1 [7 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left[1 + \tan(3x)\right]$$

[Studiare dominio, segno, simmetrie, periodicità, limiti ed eventuali asintoti, continuità; derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima; monotonia ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto; derivata seconda, convessità ed eventuali flessi; fornire un abbozzo del grafico.]

Sugg.: semplificare f' il più possibile prima di calcolare f''.

Esercizio 2 [4 punti]

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 5 + \int_4^x e^{t^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino $f(4)$ e $f'(4)$. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 4$.

Esercizio 3 [5 punti]

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + 3 \\ x(0) = 5\,. \end{cases} \tag{4}$$

- Si trovi la soluzione di (4) su tutto $\mathbb{R}$ e la si indichi con $\hat{x}(t)$;
- si verifichi che $\hat{x}(t)$ non ha un punto massimo;
- si trovi un numero L tale che $\hat{x}(t) \leq L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quesito 1 [7 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(c) \to -2$ per $c \to -\infty$. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{x+5} f(t)\, dt\,.$$

Sugg.: applicare il teorema della media all'integrale.

Quesito 2 [3 punti]

Si dia un esempio di funzione $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx = 0 \qquad \int_{-1/2}^{1/2} f^2(x)\, dx > 0$$

Quesito 3 [6 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in x_0 e $y_0 = f(x_0)$, rispettivamente.

- Nel caso in cui $g \circ f$ sia derivabile in x_0 si ha

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \ldots$$

- Si fornisca un esempio.
- Potrebbe $g \circ f$ essere non derivabile in x_0?

Tempo a disposizione: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.