Analisi Matematica 1 - a.a. 2010/2011

Primo appello - 8/2/2011

Esercizio 1

1. Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione $\phi(x) = xe^{-x^2}$ e dedurne che

$$|x|e^{-x^2} < 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\left(|x|e^{-x^2}\right).$$

[Dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico]

Svolgimento

1. Il dominio di ϕ è $\mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0\,. \tag{1}$$

Inoltre

$$\phi'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

da cui si deduce che

(a) ϕ è decrescente in $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e in $[1/\sqrt{2}, +\infty[$;

(b) ϕ è crescente in $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Da tutto ciò si evince che $-1/\sqrt{2}$ è punto di minimo assoluto e $1/\sqrt{2}$ è punto di massimo assoluto. Allora

$$\phi(-1/\sqrt{2}) \leq \phi(x) \leq \phi(1/\sqrt{2}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché

$$\phi(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} > -1\,, \qquad \phi(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} < 1\,,$$

si ottiene che $-1 < \phi(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi che

$$|\phi(x)| = |x|e^{-x^2} < 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

come si voleva.

2. Si noti che f può essere riscritta come $f(x) = \operatorname{arcsen}|\phi(x)|$, ed essendo $0 \leq |\phi(x)| < 1$, se ne deduce che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Si osservi che f è pari perché

$$f(-x) = \operatorname{arcsen}\left(|-x|e^{-(-x)^2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(|x|e^{-x^2}\right) = f(x)\,.$$

Inoltre, poiché

$$\operatorname{arcsen}\left(|x|e^{-x^2}\right) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x|e^{-x^2} \geq 0\,,$$

si ottiene che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed inoltre, essendo $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, si ha che $x = 0$ è (l'unico) punto di minimo assoluto. Da (1) si deduce che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\,,$$

e dunque l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale completo per f, che non ammette asintoti verticali e/o obliqui. La funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, essendo $\operatorname{arcsen} \in C^\infty(]-1,1[)$ e $x \mapsto |x|$ non derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^2 e^{-2x^2}}}(\operatorname{sgn} x - 2x|x|) = (\operatorname{sgn} x)\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^2 e^{-2x^2}}}(1 - 2x^2)\,, \tag{2}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $|x| = (\operatorname{sgn} x)x$. Da (2) si ottiene

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^2 e^{-2x^2}}}(1 - 2x^2) = -1\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^2 e^{-2x^2}}}(1 - 2x^2) = 1\,,$$

e quindi, essendo f continua, in $x = 0$ essa presenta un punto angoloso. Poiché

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\operatorname{sgn} x)(1 - 2x^2) \geq 0$$

si ha

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Se ne deduce che

(a) f è decrescente in $[-1/\sqrt{2}, 0]$ e in $[1/\sqrt{2}, +\infty[$;
(b) f è crescente in $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e in $[0, 1/\sqrt{2}]$;
(c) f ha in $x = \pm 1/\sqrt{2}$ punti di massimo assoluto (ricordiamo che f è pari e quindi $f(-1/\sqrt{2}) = f(1/\sqrt{2})$).

Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale improprio

$$I \doteq \int_0^{+\infty} x^2 \operatorname{sen} f(x)\, dx$$

dove la funzione f è definita come nell'Esercizio 1.

Svolgimento

Poiché vale

$$\operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} \operatorname{arcsen}\left(|x|e^{-x^2}\right) = |x|e^{-x^2}\,,$$

si ha

$$I = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot x e^{-x^2} = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\,.$$

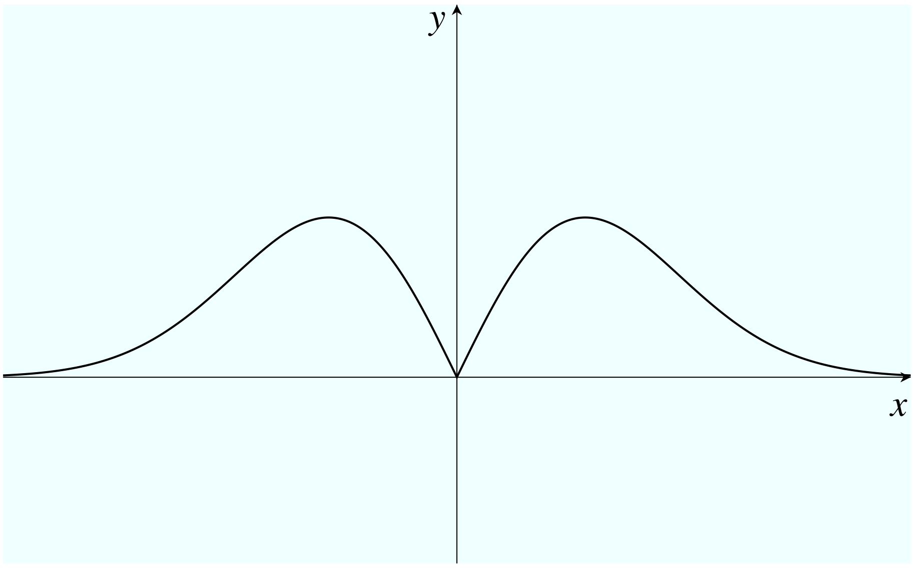

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 (gli assi hanno scale diverse)

Esercizio 3

Al variare di $\alpha > 0$ studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\operatorname{arcsen}(n^{-1}) + 3]\big[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\big]^{\alpha}}{\ln(n^2+2) - \ln(n^2)}\,.$$

Svolgimento

Poiché per $n \to +\infty$ valgono

$$\tan(1/n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(1/n^3)\,, \qquad \ln(n^2+2) - \ln(n^2) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2} + o(1/n^2)\,,$$

si ha che il termine generale è definitivamente positivo e che possiamo confrontarlo con il termine generale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha-2}}\,,$$

che converge se e solo se $3\alpha - 2 > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 1$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{[\operatorname{arcsen}(n^{-1}) + 3]\big[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\big]^{\alpha}}{\ln(n^2+2) - \ln(n^2)} n^{3\alpha-2} &= \lim_{n\to+\infty} [\operatorname{arcsen}(n^{-1}) + 3] \frac{1/n^{3\alpha} + o(1/n^{3\alpha})}{2/n^2 + o(1/n^2)} n^{3\alpha-2} \\ &\overset{\text{PdS}}{=} \lim_{n\to+\infty} [\operatorname{arcsen}(n^{-1}) + 3] \frac{n^{2-3\alpha}}{2} n^{3\alpha-2} = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Per il criterio asintotico del confronto possiamo concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.