

Analisi Matematica 1 - a.a. 2010/2011

Secondo appello - 22/2/2011

Esercizio 1

Verificare che la disuguaglianza $\phi(x) = e^{x^2} - e^{-x} + 100 > 0$ è verificata per ogni $x \in [0, +\infty[$

Svolgimento

L'esercizio si può svolgere in due modi.

1. Si osservi che $e^{x^2} \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre $e^{-x} \leq 1$ per ogni $x \geq 0$, e quindi $e^{x^2} - e^{-x} \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Allora

$$\phi(x) = e^{x^2} - e^{-x} + 100 \geq 100 > 0 \quad \forall x \geq 0,$$

come si voleva.

2. Si ha

$$\phi'(x) = 2xe^{x^2} + e^{-x} > 0 \quad \forall x \geq 0,$$

perché $xe^{x^2}, e^{-x} > 0$ per ogni $x \geq 0$. Allora ϕ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty[$ da cui si deduce che

$$\phi(x) \geq \phi(0) = 100 > 0 \quad \forall x \geq 0,$$

come si voleva.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(e^{x^2} - e^{-|x|} + 100)$$

[Studiare dominio, simmetrie, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, e fornire un abbozzo del grafico.]

Svolgimento

Il dominio è $\mathbb{R}$. Infatti, si ha $f(x) = \ln \phi(|x|)$, dove ϕ è la funzione dell'esercizio 1. Essendo $\phi(|x|) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, grazie all'esercizio 1 ed al fatto che $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ottiene che il logaritmo di $\phi(|x|)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) perché

$$f(-x) = \ln \phi(|-x|) = \ln \phi(|x|) = f(x).$$

Inoltre è sempre positiva. Infatti, essendo $e^{x^2} - e^{-x} \geq 0$ per $x \geq 0$ come già osservato nello svolgimento dell'esercizio 1, per ogni $x \geq 0$ si ha

$$e^{x^2} - e^{-x} + 99 \geq 99 > 0 \quad \implies \quad e^{x^2} - e^{-x} + 100 > 1,$$

da cui $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, e quindi anche per ogni $x < 0$ grazie alla proprietà di simmetria. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione di funzioni continue e quindi non ha asintoti verticali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-|x|} = 0,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

da cui si deduce che f non ha asintoti orizzontali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln [e^{x^2}(1 - e^{-|x|-x^2} + 100e^{-x^2})]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln e^{x^2} + \ln(1 - e^{-|x|-x^2} + 100e^{-x^2})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + \ln(1 - e^{-|x|-x^2} + 100e^{-x^2})}{x} = \pm\infty, \end{aligned}$$

perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(1 - e^{-|x|-x^2} + 100e^{-x^2}) = 0.$$

Da ciò si deduce che f non ha neanche asintoti obliqui. Riguardo alla derivabilità, siccome il termine $e^{-|x|}$ che compare nell'argomento del logaritmo non è derivabile per $x = 0$, a priori l'insieme di derivabilità di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2} + (\operatorname{sgn} x)e^{-|x|}}{e^{x^2} - e^{-|x|} + 100}.$$

In particolare, per $x > 0$ si ottiene

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2} + e^{-x}}{e^{x^2} - e^{-x} + 100},$$

che è quantità positiva, essendo tali e^{x^2} e e^{-x} . Allora f è crescente in $[0, +\infty[$ e, per simmetria, decrescente in $] -\infty, 0]$, e quindi f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$ dove vale $f(0) = \ln 100 = 2 \ln 10$. Inoltre si ha

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{100}, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{1}{100},$$

e quindi f ha un punto angoloso in $x = 0$. Un abbozzo del grafico di f si trova in figura 1.

Esercizio 3

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $] -a, a[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \frac{e^{-y^2}}{y} t^5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento

Separando le variabili si ottiene

$$\int_{y(0)}^{y(t)} ye^{y^2} dy = \int_0^t s^5 ds,$$

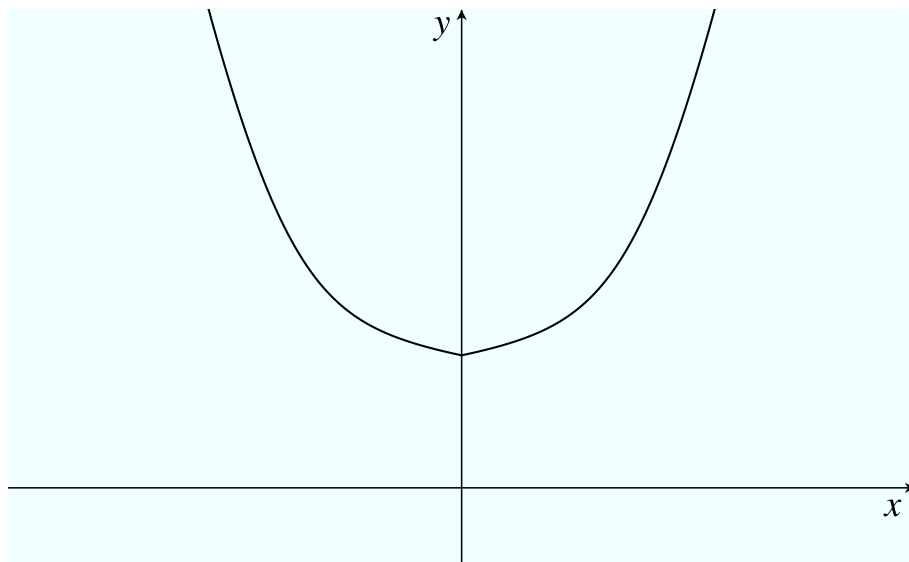


Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 2

e quindi, sfruttando la condizione iniziale,

$$\left. \frac{1}{4} e^{y^2} \right|_2^{y(t)} = \frac{1}{6} t^6 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{y^2(t)} - e^4 = \frac{2}{3} t^6 .$$

Da questo si ricava che

$$y^2(t) = \ln \left(\frac{2}{3} t^6 + e^4 \right) ,$$

da cui, sfruttando il fatto che $y(0) = 2 > 0$, si ottiene

$$y(t) = \sqrt{\ln \left(\frac{2}{3} t^6 + e^4 \right)} ,$$

che è definita fintantoché l'argomento della radice quadrata è positivo, cioè se

$$\frac{2}{3} t^6 + e^4 > 1 ,$$

che è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$, essendo $t^6 \geq 0$ e $e^4 > 1$. Allora l'intervallo di esistenza della soluzione è $] -\infty, +\infty[$.