Analisi Matematica 1 - a.a. 2010/2011

Terzo appello - 24/6/2011

Esercizio 1

Studiare la funzione
$$f(x) = \ln\left(e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|} - e\right)$$
[Studiare dominio, simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, segno e fornire un abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

Svolgimento

Dominio. Deve essere
$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|} - e > 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq 1 \\ |2x-\sqrt{x^2-1}| > 1\,. \end{cases} \tag{1}$$
La seconda disequazione è equivalente a
$$2x - \sqrt{x^2-1} > 1 \quad \text{o} \quad 2x - \sqrt{x^2-1} < -1\,. \tag{2}$$
Risolviamo la prima, ricordando la condizione $x \leq -1$ o $x \geq 1$ presente in (1):
$$2x-1 > \sqrt{x^2-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 > x^2-1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ 3x^2-4x+2 > 0\,. \end{cases}$$
Poiché $3x^2-4x+2>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ottiene che
$$2x - \sqrt{x^2-1} > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 1\,.$$
Per la seconda disequazione di (2), si osservi che se $x \leq -1$, si ha
$$2x - \sqrt{x^2-1} \leq -2 - \sqrt{x^2-1} \leq -2 < -1\,.$$
e quindi $2x - \sqrt{x^2-1} < -1$ è verificata per $x \leq -1$. Allora si deduce che il dominio D della funzione è
$$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-1, 1[\,.$$

Simmetrie. Poiché
$$f(-x) = \ln\left(e^{|-2x-\sqrt{(-x)^2-1}|} - e\right) = \ln\left(e^{|-2x-\sqrt{x^2-1}|} - e\right) = \ln\left(e^{|2x+\sqrt{x^2-1}|} - e\right),$$
la funzione non è pari né dispari.

Limiti ed eventuali asintoti. La funzione è continua nel suo dominio perché composizione di funzioni continue. Inoltre non esistono punti di accumulazione reali del dominio D di f non appartenenti a D, e quindi f non ha asintoti verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Poiché
$$\lim_{x\to\pm\infty} 2x - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(2 - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left[2 - (\operatorname{sgn} x)\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right] = \pm\infty\,,$$

si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,,$$
e quindi la funzione non ha asintoti orizzontali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si osservi che
$$f(x) = \ln\left[e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|})\right] = |2x-\sqrt{x^2-1}| + \ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)$$
$$= \begin{cases} 2x-\sqrt{x^2-1} + \ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right) & \text{se } \ x\geq 1\,, \\ -2x+\sqrt{x^2-1} + \ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right) & \text{se } \ x\leq -1\,. \end{cases}$$
Allora si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\frac{\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)}{x}\right] = 1\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2-1}+\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0\,,$$
e quindi la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ per f. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui a $-\infty$. Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[-2+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}+\frac{\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)}{x}\right] = -3\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}+\ln\left(1-e^{1-|2x-\sqrt{x^2-1}|}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0\,,$$
e quindi la retta di equazione $y=-3x$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per f.

Studio della derivata prima e segno della funzione. La funzione è sicuramente derivabile in $D\setminus\{\pm1\}$ perché composizione di funzioni derivabili. In $x=\pm1$ a priori non si può dire nulla sulla derivabilità per la presenza del termine $\sqrt{x^2-1}$, che in tali punti non è derivabile. Per $x\neq\pm1$ si ha
$$f'(x) = \frac{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}}{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}-e}\,\mathrm{sgn}\left(2x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(2-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\,.$$
Si osservi che
$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}}{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}-e}\left(2-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} -\frac{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}}{e^{|2x-\sqrt{x^2-1}|}-e}\left(2-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\infty\,,$$

e quindi f non è derivabile in $x = \pm 1$. Studiamo il segno di f'. Si osservi che

$$\operatorname{sgn}\left(2x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq -1\,, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1\,, \end{cases}$$

ed inoltre vale

$$2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\sqrt{x^2 - 1} \geq x\,.$$

L'ultima disequazione è sicuramente verificata per $x < -1$. Per $x > 1$ deve valere

$$4x^2 - 4 \geq x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 2\sqrt{3}\,.$$

Da tutto questo si deduce che

- f è decrescente in $]-\infty, -1]$ e in $[1, 2/\sqrt{3}]$;
- f è crescente in $[2/\sqrt{3}, +\infty[$;
- f ha un punto di massimo relativo in $x = 1$ con $f(1) = \ln(e^2 - e)$;
- f ha punti di minimo relativo in $x = -1$ e in $x = 2/\sqrt{3}$ con $f(-1) = \ln(e^2 - e)$ e

$$f(2\sqrt{3}/3) = \ln\left(e^{4/\sqrt{3} - 1\sqrt{3}} - e\right) = \ln(e^{\sqrt{3}} - e)\,.$$

Allora f ha in $x = 2/\sqrt{3}$ un punto di minimo assoluto. Poiché $f(2\sqrt{3}/3) > 0$, se ne deduce che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

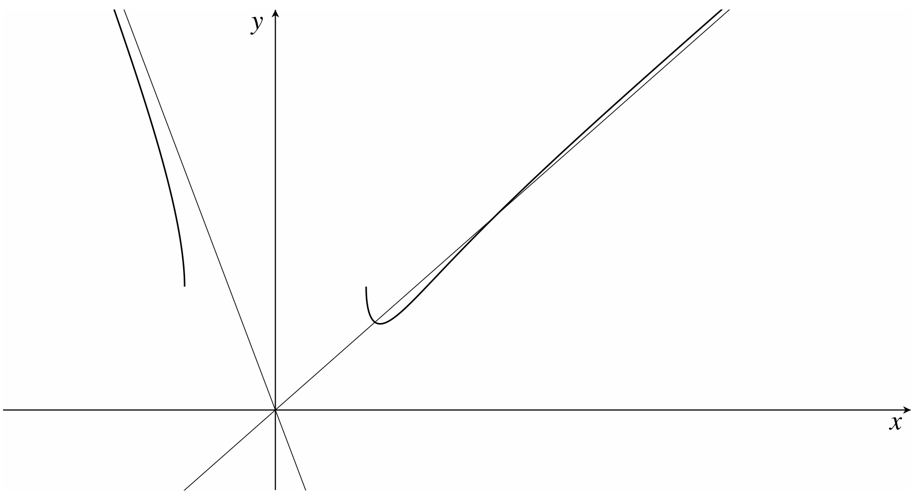

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1

Esercizio 2

Si dica, motivandolo, per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x^{\alpha^2 + \alpha + 1} + x^2)}\, dx$$

converge.

Svolgimento

L'integrale converge se il

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2)}\,dx$$

esiste finito. Poiché la funzione integranda è positiva nell'intervallo $]0,1]$, cerchiamo di applicare il criterio asintotico del confronto. Si osservi che, essendo $\alpha^2+\alpha+1>0$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{sen}(x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2) = x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2+o(x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2) \qquad \text{per } x\to 0\,.$$

Poiché $\cos x\to 1$ per $x\to 0$, si ottiene che

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}(x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2)} \sim \frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2} \qquad \text{per } x\to 0\,.$$

Allora l'integrale converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2}\,dx\,.$$

Se $\alpha^2+\alpha+1\geq 2$, allora

$$\frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x\to 0\,,$$

e quindi l'integrale è divergente. Se $\alpha^2+\alpha+1<2$, allora

$$\frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha+1}+x^2} \sim \frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha+1}} \qquad \text{per } x\to 0\,,$$

e quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha^2+\alpha+1<1$, cioè se e solo se $-1<\alpha<0$.

Esercizio 3

Trovare una soluzione definita in un intervallo aperto del tipo $]-a,a[$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{(1+t)e^t}{\operatorname{sen} y(t)} \\ \\ y(0)=\pi/2 \end{cases}$$

Svolgimento

Poiché

$$\left.\frac{(1+t)e^t}{\operatorname{sen} y}\right|_{t=0,\, y=\pi/2} = 1\neq 0\,,$$

si possono separare le variabili ottenendo

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \operatorname{sen} y\,dy = \int_0^t (1+s)e^s\,ds\,.$$

Si ha

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \operatorname{sen} y\,dy = -\cos y\Big|_{\pi/2}^{y(t)} = -\cos y(t)\,,$$

ed inoltre, integrando per parti,

$$\int_0^t (1+s)e^s\,ds = (1+s)e^s\Big|_0^t - \int_0^t e^s\,ds = te^t\,.$$

Si ottiene che deve valere

$$-\cos y(t) = te^t\,.$$

Poiché tale uguaglianza vale in un intorno di $t = 0$, ed essendo $-1 < te^t < 1$ in un opportuno intorno di $t = 0$, si ottiene che

$$y(t) = \arccos(-te^t)\,.$$

Tale soluzione del problema di Cauchy è definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$ per cui vale $-1 < te^t < 1$ (e quindi, in particolare, in un opportuno intervallo del tipo $]-a, a[$, con $a > 0$).