Analisi Matematica 1 - a.a. 2010/2011

Quarto appello - 14/9/2011

Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(1 + \tan x)$$

[Studiare dominio, segno, simmetrie, periodicità, limiti ed eventuali asintoti, continuità; derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima; monotonia ed eventuali punti di estremo relativo e assoluto; derivata seconda, convessità ed eventuali flessi; fornire un abbozzo del grafico.]

Svolgimento

Dominio, periodicità e simmetrie. Il dominio della funzione è

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

perché la funzione tangente non è definita nei punti del tipo $\pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo inoltre che

$$f(x + k\pi) = \arctan\left[1 + \tan(x + k\pi)\right] = \arctan(1 + \tan x) = f(x),$$

e quindi f è periodica di periodo π. Allora ci limiteremo a studiare la funzione nell'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$, potendo poi dedurre per periodicità le sue proprietà in tutto D. Inoltre, f non è pari né dispari perché

$$f(-x) = \arctan\left[1 + \tan(-x)\right] = \arctan(1 - \tan x) \neq \pm f(x).$$

Segno. Essendo $\arctan y \geq 0$ se e solo se $y \geq 0$, per $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ si ha

$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \tan x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-\pi/4, \pi/2[\,.$$

Limiti ed asintoti. La funzione non presenta asintoti orizzontali o obliqui essendo periodica. Inoltre è limitata perché $\arctan y \in]-\pi/2, \pi/2[$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e quindi

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall\, x \in D.$$

f è continua in D perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo i limiti nei punti di accumulazione di D esterni a D, cioè per $x \to \pm\pi/2$. Poiché

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

e quindi f non può essere prolungata per continuità nei punti del tipo $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Derivata e monotonia. La funzione è derivabile in D perché composizione di funzioni derivabili. Si ha

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)}{1 + (1 + \tan x)^2},$$

da cui risulta che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Allora f è strettamente crescente in $]-\pi/2, \pi/2[$, e quindi lo è in ogni intervallo periodo del tipo $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare, f non ha punti di massimo o minimo. Inoltre risulta

$$\lim_{x\to-\pi/2^+} f'(x) \overset{y=\tan x}{=} \lim_{y\to-\infty} \frac{1+y^2}{2+2y+y^2} = 1\,, \qquad \lim_{x\to\pi/2^-} f'(x) \overset{y=\tan x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1+y^2}{2+2y+y^2} = 1\,.$$

Derivata seconda e convessità. La funzione è derivabile due volte in D perché composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2\tan x(1+\tan^2 x)\big[1+(1+\tan x)^2\big] - 2(1+\tan^2 x)^2(1+\tan x)}{\big[1+(1+\tan x)^2\big]^2} \\
&= (1+\tan^2 x)\frac{2\tan x + (1+\tan x)(2\tan x + 2\tan^2 x - 2 - 2\tan^2 x)}{\big[1+(1+\tan x)^2\big]^2} \\
&= (1+\tan^2 x)\frac{2\tan x + 2(\tan^2 x - 1)}{\big[1+(1+\tan x)^2\big]^2} = 2(1+\tan^2 x)\frac{\tan^2 x + \tan x - 1}{\big[1+(1+\tan x)^2\big]^2}\,.
\end{aligned}$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan^2 x + \tan x - 1 \geq 0\,.$$

Poiché

$$t^2 + t - 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad t \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

si ha

$$\tan^2 x + \tan x - 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad \tan x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

e quindi per $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ si ottiene che

$$f''(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} < x \leq \arctan\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{o} \quad \arctan\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Se ne deduce che:

- f è convessa in $\big]-\pi/2, \arctan[(-1-\sqrt{5})/2]\big]$ e in $\big[\arctan[(-1+\sqrt{5})/2], \pi/2\big[$;
- f è concava in $\big[\arctan[(-1-\sqrt{5})/2], \arctan[(-1+\sqrt{5})/2]\big]$;
- f ha punti di flesso in $x = \arctan[(-1-\sqrt{5})/2]$ e in $x = \arctan[(-1+\sqrt{5})/2]$.

Per periodicità si deduce che:

- f è convessa negli intervalli del tipo $\big]-\pi/2 + k\pi, \arctan[(-1-\sqrt{5})/2] + k\pi\big]$ e del tipo $\big[\arctan[(-1+\sqrt{5})/2] + k\pi, \pi/2 + k\pi\big[$, con $k \in \mathbb{Z}$;
- f è concava negli intervalli del tipo $\big[\arctan[(-1-\sqrt{5})/2] + k\pi, \arctan[(-1+\sqrt{5})/2] + k\pi\big]$, con $k \in \mathbb{Z}$;
- f ha punti di flesso in $x = \arctan[(-1-\sqrt{5})/2] + k\pi$ e in $x = \arctan[(-1+\sqrt{5})/2] + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

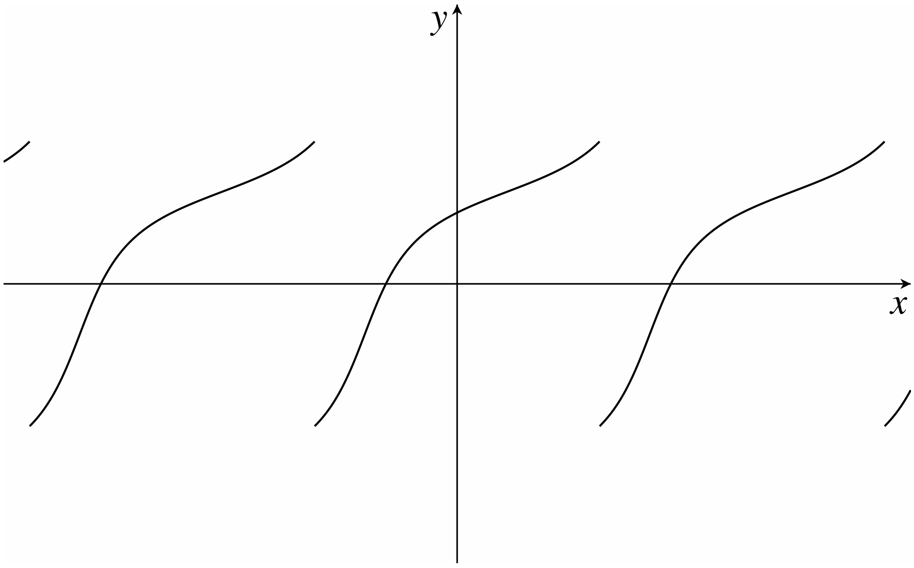

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1

Esercizio 2

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{t^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino $f(0)$ e $f'(0)$. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = 0$.

Svolgimento

Si ha

$$f(0) = 1 + \int_0^0 e^{t^2}\, dt = 1\,,$$

e, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$f'(0) = e^{t^2}\Big|_{t=0} = 1\,.$$

La retta tangente al grafico di f in $x = 0$ ha equazione $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$, e quindi

$$y = 1 + x\,.$$

Esercizio 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 5 \\ x(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

- Si trovi la soluzione di (1) su tutto $\mathbb{R}$ e la si indichi con $\hat{x}(t)$;
- si verifichi che $\hat{x}(t)$ non ha un punto massimo;
- si trovi un numero L tale che $\hat{x}(t) \leq L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Riscriviamo l'equazione differenziale come

$$\dot{x}(t) + 3x(t) = 5\,.$$

Moltiplicando per e^{3t} ambo i membri si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left[e^{3t}x(t)\right] = 5e^{3t}\,.$$

Integrando tra 0 e t si ha

$$e^{3s}x(s)\Big|_0^t = \frac{5}{3}e^{3s}\Big|_0^t\,,$$

da cui

$$e^{3t}x(t) = \frac{5}{3}e^{3t} - \frac{5}{3}\,,$$

e quindi

$$\hat{x}(t) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t}\,.$$

Poiché $D\hat{x}(t) = 5e^{-3t} > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\hat{x}(t)$ è strettamente crescente e quindi non ha massimo. Inoltre, essendo $e^{-3t} > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha $\hat{x}(t) < 5/3 = L$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Quesito 1

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(c) \to 2$ per $c \to +\infty$. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+2} f(t)\,dt\,.$$

Svolgimento

Per il teorema della media si ha

$$\int_x^{x+2} f(t)\,dt = 2f(c_x)\,,$$

con $c_x \in [x, x+2]$. Poiché $c_x \to +\infty$ per $x \to +\infty$, si ha $f(c_x) \to 2$ per $x \to +\infty$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+2} f(t)\,dt = 2 \lim_{x\to+\infty} f(c_x) = 4\,.$$