Analisi Matematica 1 - a.a. 2017/2018 - Primo appello

Soluzione del test

Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	E	C	D	E	A	B	B	D

Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	B	E	B	B	C	D	E	A

Test C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	C	A	E	D	E	C	D	C

Test D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	A	D	A	C	B	B	A	E

Soluzione della parte di esercizi del Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \ln\left|e^{2x} - e^2\right| - |2x|\,.$$

[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. Deve essere $|e^{2x} - e^2| \neq 0$, e quindi $x \neq 1$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Simmetrie. Poiché il dominio di f non è simmetrico rispetto a $x = 0$, f non ha simmetrie.
- Segno.
$$f(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left|e^{2x} - e^2\right| \geq |2x| \quad \Longleftrightarrow \quad \left|e^{2x} - e^2\right| \geq e^{|2x|}\,,$$
  e quindi
$$f(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x} - e^2 \geq e^{|2x|} \quad \text{o} \quad e^{2x} - e^2 \leq -e^{|2x|}\,.$$
  1. Vediamo la prima, $e^{2x} - e^2 \geq e^{|2x|}$.
     Se $x \geq 0$, si ottiene $-e^2 \geq 0$, che non è mai verificata.
     Se $x < 0$, si ottiene $e^{2x} - e^2 \geq e^{-2x}$, che non è mai verificata perché $e^{2x} - e^2 < 1$ e $e^{-2x} > 1$.

2. Vediamo la seconda $e^{2x} - e^2 \le -e^{|2x|}$.
Se $x \ge 0$, si ottiene

$$e^{2x} - e^2 \le -e^{2x} \quad\Longleftrightarrow\quad 2e^{2x} \le e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \le x \le 1 - \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Se $x < 0$, si ottiene

$$e^{2x} - e^2 \le -e^{-2x} \quad\Longleftrightarrow\quad e^{4x} - e^2 e^{2x} + 1 \le 0\,.$$

Risolvendo la disequazione $t^2 - e^2 t + 1 \le 0$ e tenendo conto che $x < 0$, si ottiene che

$$e^{2x} - e^2 \le -e^{-2x} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2 - \sqrt{e^4-4}}{2}\right) \le x < 0^1\,.$$

Allora

$$f(x) \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2 - \sqrt{e^4-4}}{2}\right) \le x \le 1 - \ln\sqrt{2}\,.$$

In particolare

$$f(x) = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2 - \sqrt{e^4-4}}{2}\right) \quad \text{o} \quad x = 1 - \ln\sqrt{2}\,.$$

- Continuità. Essendo differenza e composizione di funzioni continue, f è continua nel suo dominio.
- Asintoti. Si ha

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty\,,$$

e quindi la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per f.

Vediamo i limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left|e^{2x}(1-e^{2-2x})\right| - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln(1-e^{2-2x}) = 0\,,$$

e quindi l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per f a $=\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^2 - e^{2x}\right) + 2x\right] = -\infty\,.$$

Ricerchiamo asintoti obliqui a $-\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[2 + \frac{\ln\left(e^2-e^{2x}\right)}{x}\right] = 2\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - 2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^2-e^{2x}\right) = 2\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = 2x + 2$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per f.

[1]Si osservi che $\frac{e^2-\sqrt{e^4-4}}{2} < 1$ perché si verifica facilmente che $e^2 - 2 < \sqrt{e^4-4}$.

- Derivabilità. Poiché le funzioni valore assoluto non è derivabile in $x = 0$, a priori non possiamo derivare f nell'origine. Per $x \neq 0$ si ottiene

$$f'(x) = 2\left[\frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^2} - \operatorname{sgn} x\right].$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\left[\frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^2} - 1\right] = \frac{2e^2}{1 - e^2} = f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2\left[\frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^2} + 1\right] = 2\frac{e^2 - 2}{e^2 - 1} = f'_-(0),$$

e quindi $x = 0$ è punto angoloso.

- Intervalli di monotonia.

Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^2} - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^2}{e^{2x} - e^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 1.$$

Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{2x}}{e^{2x} - e^2} + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2e^{2x} - e^2}{e^{2x} - e^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2e^{2x} \leq e^2,$$

che è sempre verificata per $x < 0$. Allora

  - f è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $]1, +\infty[$;
  - f è decrescente in $[0, 1[$;
  - f ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$, mentre non ha punti di minimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

f è derivabile due volte per $x \neq 0$, $x \in \operatorname{dom} f$. In tali punti si ha

$$f''(x) = -4e^2 \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - e^2)^2} < 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \neq 0.$$

Allora, essendo anche $f'_-(0) > f'_+(0)$, f è concava in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$, e non presenta punti di flesso.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 2)(e^{4x} + 4)}\, dx.$$

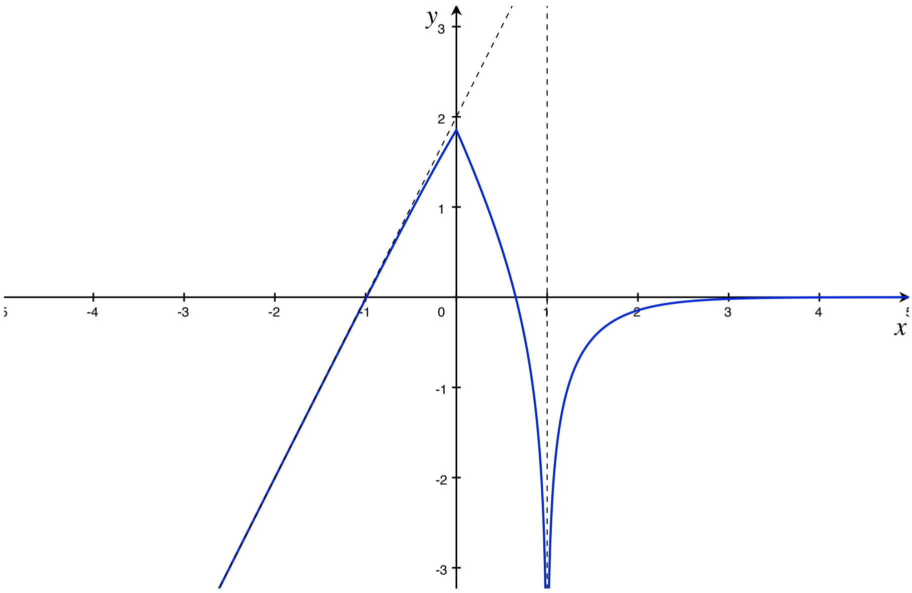

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 1 (gli assi hanno scale diverse)

Svolgimento

Con il cambio di variabile $t = e^{2x}$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)(e^{4x}+4)}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{1}{(t+2)(t^2+4)}\,dt\,.$$

Troviamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t+2)(t^2+4)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+4} = \frac{(A+B)t^2+(2B+C)t+4A+2C}{(t+2)(t^2+4)}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 4A+2C=1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A=1/8 \\ B=-1/8 \\ C=1/4\,, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)(e^{4x}+4)}\,dx &= \frac{1}{16}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{t-2}{t^2+4}\right)dt \\ &= \frac{1}{16}\left[\ln(t+2) - \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \arctan\frac{t}{2}\right]_{t=1}^{t=e^2} \\ &= \frac{1}{16}\left[\ln\frac{\sqrt{5}(e^2+2)}{3\sqrt{e^4+4}} + \arctan\frac{e^2}{2} - \arctan\frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Esercizio 3

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\sqrt{n}} + e^{\alpha n}}{\cosh n}\,.$$

Svolgimento

Innanzitutto si osservi che la serie è a termini positivi. Dopodiché, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{e^{\alpha n}} = +\infty \qquad \forall \alpha \leq 0\,,$$

mentre, se $\alpha > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{e^{\alpha n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}\ln 4}}{e^{\alpha n}} = 0\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned} e^{\alpha n} &= o(4^{\sqrt{n}}) \qquad \text{per } n \to +\infty \text{ se } \alpha \leq 0\,, \\ 4^{\sqrt{n}} &= o(e^{\alpha n}) \qquad \text{per } n \to +\infty \text{ se } \alpha > 0\,. \end{aligned}$$

Inoltre, è noto che

$$\cosh n \sim \frac{e^n}{2} \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Allora la serie data converge se e solo se

$$\begin{aligned} &\text{converge} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{e^n} \qquad \text{se} \quad \alpha \leq 0\,, \\ &\text{converge} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{e^n} \qquad \text{se} \quad \alpha > 0\,. \end{aligned}$$

La seconda si riscrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\alpha}}{e}\right)^n\,,$$

che converge se e solo se $e^{\alpha} < e$, cioè se e solo se $\alpha < 1$. Per la prima, applicando il criterio asintotico della radica si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}/n}}{e} = \frac{1}{e} < 1\,,$$

ed è quindi convergente. Allora la serie data converge se e solo se $\alpha < 1$.

Soluzione della parte di esercizi del Tema 3

Esercizio 1

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \left|\frac{x}{2}\right| - \ln\left|e^{x/2} - e\right|\,.$$

[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. Deve essere $|e^{x/3} - e| \neq 0$, e quindi $x \neq 3$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- Simmetrie. Poiché il dominio di f non è simmetrico rispetto a $x = 0$, f non ha simmetrie.

- Segno.
$$f(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln\left|e^{x/2} - e\right| \leq |x/2| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|e^{x/2} - e\right| \leq e^{|x/2|}\,,$$
e quindi
$$f(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -e^{|x/2|} \leq e^{x/2} - e \leq e^{|x/2|}\,.$$

  1. Vediamo la prima, $e^{x/2} - e \geq -e^{|x/2|}$.
  Se $x \geq 0$, si ottiene
  $$e^{x/2} - e \geq -e^{x/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2e^{x/2} \geq e \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 2 - 2\ln 2\,.$$
  Se $x < 0$, si ottiene
  $$e^{x/2} - e \geq -e^{-x/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x/2} - ee^{x/2} + 1 \geq 0\,.$$
  Risolvendo la disequazione $t^2 - et + 1 \geq 0$ e tenendo conto che $x < 0$, si ottiene che
  $$e^{x/2} - e \geq -e^{x/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq 2\ln\left(\frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right)\,.$$ [2]

  2. Vediamo la seconda $e^{x/2} - e \leq e^{|x/2|}$.
  Se $x \geq 0$, si ottiene $e^{x/2} - e \leq e^{x/2}$, e quindi $-e \leq 0$, che è sempre verificata.
  Se $x < 0$, si ottiene $e^{x/2} - e \leq e^{-x/2}$, che ancora è sempre verificata perché per $x < 0$ si ha $e^{x/2} - e < 1$ e $e^{-x/2} > 1$.

  Allora
  $$f(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq 2\ln\left(\frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right) \quad \text{o} \quad x \geq 2 - 2\ln 2\,,\ x \neq 3\,.$$
  In particolare
  $$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2\ln\left(\frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right) \quad \text{o} \quad x = 2 - 2\ln 2\,.$$

- Continuità. Essendo differenza e composizione di funzioni continue, f è continua nel suo dominio.

- Asintoti. Si ha
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty\,,$$
e quindi la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per f.
Vediamo i limiti all'infinito.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{1 - x/2}) = 0\,,$$

[2] Si osservi che $\dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} < 1$ perché si verifica facilmente che $e - 2 < \sqrt{e^2 - 4}$.

e quindi l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per f a $+\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Ricerchiamo asintoti obliqui a $-\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\ln\left(e-e^{x/2}\right)}{x}\right] = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x)+x/2\right] = -\lim_{x\to-\infty} \ln\left(e-e^{x/2}\right) = -1\,,$$

e quindi la retta di equazione $y=-1-x/2$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per f.

- Derivabilità. Poiché le funzioni valore assoluto non è derivabile in $x=0$, a priori non possiamo derivare f nell'origine. Per $x\neq 0$ si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn} x - \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}-e}\right].$$

Allora

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}-e}\right] = -\frac{e}{2(1-e)} = f'_+(0)\,,$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\lim_{x\to0^-} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}-e}\right] = -\frac{e-2}{2(e-1)} = f'_-(0)\,,$$

e quindi $x=0$ è punto angoloso.

- Intervalli di monotonia.

Per $x>0$ si ha

$$f'(x)\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1-\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}-e}\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{e}{e^{x/2}-e}\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x<2\,.$$

Per $x<0$ si ha

$$f'(x)\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1+\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}-e}\le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2e^{x/2}-e}{e^{x/2}-e}\le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2e^{x/2}\ge e\,,$$

che non è mai verificata per $x<0$. Allora

  - f è crescente in $[0,2[$;
  - f è decrescente in $]-\infty,0]$ e in $]2,+\infty[$;
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x=0$, mentre non ha punti di massimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

f è derivabile due volte per $x\neq 0$, $x\in\operatorname{dom} f$. In tali punti si ha

$$f''(x) = \frac{e}{4}\frac{e^{x/2}}{(e^{x/2}-e)^2} > 0 \quad \forall x\in\operatorname{dom} f,\ x\neq 0\,.$$

Allora, essendo anche $f'_-(0)<f'_+(0)$, f è convessa in $]-\infty,2[$ e in $]2,+\infty[$, e non presenta punti di flesso.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 2.

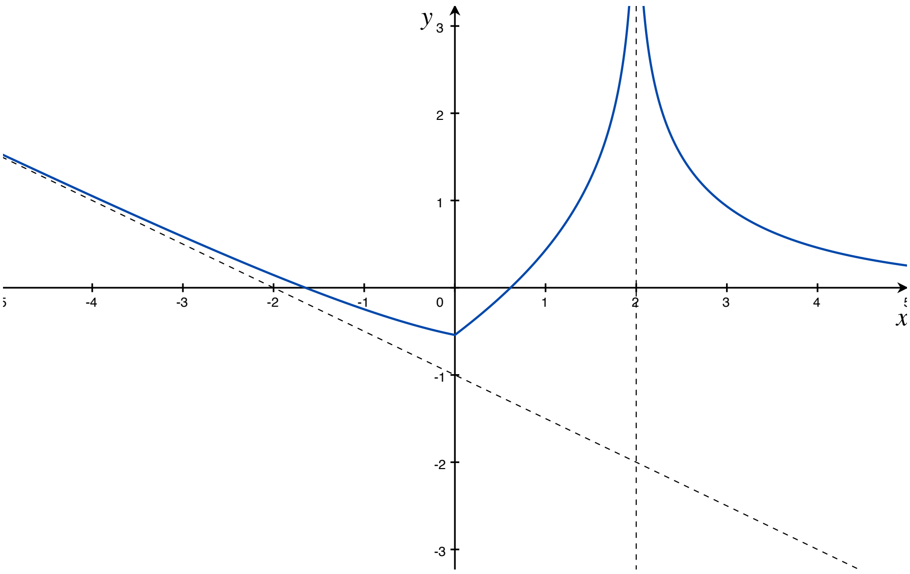

Figura 2: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del Tema 3 (gli assi hanno scale diverse)

Esercizio 2

Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+3)(e^{6x}+9)}\, dx\,.$$

Svolgimento

Con il cambio di variabile $t = e^{3x}$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+3)(e^{6x}+9)}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^{e^3} \frac{1}{(t+3)(t^2+9)}\, dt\,.$$
Troviamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{1}{(t+3)(t^2+9)} = \frac{A}{t+3} + \frac{Bt+C}{t^2+9} = \frac{(A+B)t^2+(3B+C)t+9A+3C}{(t+2)(t^2+4)}\,,$$
da cui
$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3B+C=0 \\ 9A+3C=1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A=1/18 \\ B=-1/18 \\ C=1/6\,, \end{cases}$$
e quindi
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+3)(e^{6x}+9)}\, dx &= \frac{1}{54}\int_1^{e^3}\left(\frac{1}{t+3} - \frac{t-3}{t^2+9}\right) dt \\ &= \frac{1}{54}\left[\ln(t+3) - \frac{1}{2}\ln(t^2+9) + \arctan\frac{t}{3}\right]_{t=1}^{t=e^3} \\ &= \frac{1}{54}\left[\ln\frac{\sqrt{10}(e^3+3)}{4\sqrt{e^6+9}} + \arctan\frac{e^3}{3} - \arctan\frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Al variare di $\alpha > 0$ studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n + 4^{\sqrt{n}}}{\cosh n}\,.$$

Svolgimento

Innanzitutto si osservi che la serie è a termini positivi. Dopodiché, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{\alpha^n} = +\infty \qquad \forall 0 < \alpha \le 1\,,$$

mentre, se $\alpha > 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{\alpha^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}\ln 4}}{e^{n\ln\alpha}} = 0\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \alpha^n &= o(4^{\sqrt{n}}) && \text{per } n \to +\infty \text{ se } 0 < \alpha \le 1\,, \\ 4^{\sqrt{n}} &= o(\alpha^n) && \text{per } n \to +\infty \text{ se } \alpha > 1\,. \end{aligned}$$

Inoltre, è noto che

$$\cosh n \sim \frac{e^n}{2} \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Allora la serie data converge se e solo se

$$\begin{aligned} &\text{converge} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\sqrt{n}}}{e^n} && \text{se} \quad 0 < \alpha \le 1\,, \\ &\text{converge} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{e^n} && \text{se} \quad \alpha > 1\,. \end{aligned}$$

La seconda si riscrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^n\,,$$

che converge se e solo se $\alpha < e$, $\alpha > 0$. Per la prima, applicando il criterio asintotico della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{\sqrt{n}/n}}{e} = \frac{1}{e} < 1\,,$$

ed è quindi convergente. Allora la serie data converge se e solo se $\alpha < e$, $\alpha > 0$.