Analisi Matematica 1 - a.a. 2017/2018 - Secondo appello

Soluzione del test

Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	B	C	B	A	E	D	D

Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	C	B	E	D	E	A	A

Test C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	B	E	E	D	C	B	B	C

Test D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	D	D	A	A	E	A	C	C

Soluzione della parte di esercizi del Tema 1

Esercizio 1

Sia data la funzione f definita da
$$f(x) = |x+1|e^{\frac{1}{x+2}}\,.$$
[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. Deve essere $x+2 \neq 0$, e quindi $x \neq -2$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Simmetrie. Poiché il dominio di f non è simmetrico rispetto a $x = 0$, f non ha simmetrie.
- Segno. Banalmente, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Inoltre, $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$, che quindi è punto di minimo assoluto.
- Continuità. Essendo prodotto e composizione di funzioni continue, f è continua nel suo dominio.
- Asintoti. Si ha
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = 0\,,$$
e quindi la retta di equazione $x = -2$ è asintoto verticale per f.

  Vediamo i limiti all'infinito. Essendo $e^{\frac{1}{x+2}} \to 1$ per $x \to \pm\infty$, si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Ricerchiamo asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x+2}}\right]=-1\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big[f(x)+x\big]=\lim_{x\to-\infty}\big[x-(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}\big]=\lim_{x\to-\infty}\big[(1-e^{\frac{1}{x+2}})x-e^{\frac{1}{x+2}}\big]=-2\,,$$

perché

$$\lim_{x\to-\infty}(1-e^{\frac{1}{x+2}})x=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x+2}+o(1/(x+2))\right]x=-1\,.$$

Allora la retta di equazione $y=-x-2$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per f.

Inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x+2}}=1\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-x\big]=\lim_{x\to-\infty}\big[(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}-x\big]=\lim_{x\to+\infty}\big[(e^{\frac{1}{x+2}}-1)x+e^{\frac{1}{x+2}}\big]=2\,,$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x+2}}-1)x=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+2}+o(1/(x+2))\right]x=1\,.$$

Allora la retta di equazione $y=x+2$ è asintoto obliquo a $+\infty$ per f.

- Derivabilità. Poiché la funzione valore assoluto non è derivabile nell'origine, a priori non possiamo derivare f in $x=-1$. Per $x\neq-1$ si ottiene

$$\begin{aligned}f'(x)&=\operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}-|x+1|\frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{(x+2)^2}=\operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}-(x+1)\operatorname{sgn}(x+1)\frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{(x+2)^2}\\&=\operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}\left(1-\frac{x+1}{(x+2)^2}\right)=\operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=\lim_{x\to-1^+}e^{\frac{1}{x+2}}\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}=e=f'_+(-1)\,,$$

$$\lim_{x\to-1^-}f'(x)=-\lim_{x\to-1^-}e^{\frac{1}{x+2}}\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}=-e=f'_-(-1)\,,$$

e quindi $x=-1$ è punto angoloso.

- Intervalli di monotonia.

Essendo $x^2+3x+3>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si ha che $f'(x)>0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(x+1)>0$, cioè se e solo se $x>-1$. Allora

  - f è crescente in $[-1,+\infty[$;
  - f è decrescente in $]-\infty,-2[$ e in]-2,-1];
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x=-1$, come già osservato, mentre non ha punti di massimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

  f è derivabile due volte per $x \neq -1$, $x \in \operatorname{dom} f$. In tali punti si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}\left[\frac{(2x+3)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+3x+3)}{(x+2)^4} - \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^4}\right] \\ &= -\operatorname{sgn}(x+1)e^{\frac{1}{x+2}}\frac{x+3}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

  Allora $f''(x) > 0$ se e solo se $(x+1)(x+3) < 0$, cioè se e solo se $-3 < x < -1$. Inoltre, $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -3$. Se ne deduce che

  - f è convessa in $[-3-2[$ e in $]-2-1]$;
  - f è concava in $]-\infty, -3]$ e in $[-1, +\infty[$;
  - f ha un punti di flesso in $x = -3$ e in $x = -1$.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

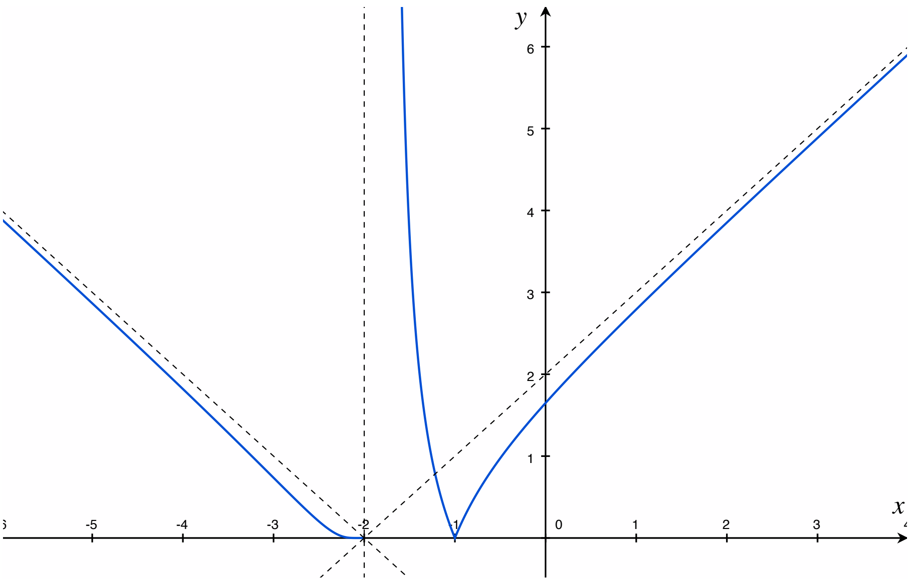

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 1

Esercizio 2

1. Stabilire se ognuno dei seguenti integrali impropri è convergente o divergente

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)}\,dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x^2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)}\,dx\,.$$

2. Trovare tutti e soli gli $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^\alpha}{x^{3/2}\ln(1+x^{3\alpha-2})}\,dx\,.$$

Svolgimento

Osserviamo che le funzioni integrande sono positive e quindi possiamo utilizzare i criteri del confronto e del confronto asintotico.

1. Studiamo il primo integrale. Per $x \to 0$ si ha

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2}x^4\,, \qquad \ln(1+x^4) \sim x^4\,,$$

da cui si deduce che

$$\frac{1-\cos x^2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)} \sim \frac{1}{2}\frac{x^4}{x^{3/2}x^4} = \frac{1}{2x^{3/2}} \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi l'integrale è divergente.

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che

$$0 \le \frac{1-\cos x^2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)} \le \frac{2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)}\,,$$

e che per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+x^4) \sim \ln x$. Allora

$$\frac{2}{x^{3/2}\ln(1+x^4)} \sim \frac{2}{x^{3/2}\ln x} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,,$$

e quindi l'integrale dato è convergente grazie al criterio del confronto.

2. Si osservi che, essendo $\alpha > 0$, per $x \to 0$ si ha

$$1 - \cos x^\alpha \sim \frac{1}{2}x^{2\alpha}\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^{3\alpha-2}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 2/3\,, \\ \ln 2 & \text{se} \quad \alpha = 2/3\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 2/3\,. \end{cases}$$

In particolare, per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} &\ln(1+x^{3\alpha-2}) \sim x^{3\alpha-2} && \text{se} \quad \alpha > 2/3\,, \\ &\ln(1+x^{3\alpha-2}) = \ln 2 && \text{se} \quad \alpha = 2/3\,, \\ &\ln(1+x^{3\alpha-2}) \sim (2-3\alpha)|\ln x| && \text{se} \quad \alpha < 2/3\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &\frac{1-\cos x^\alpha}{x^{3/2}\ln(1+x^{3\alpha-2})} \sim \frac{x^{2\alpha}}{2x^{3/2}x^{3\alpha-2}} = \frac{1}{2x^{\alpha-1/2}} && \text{se} \quad \alpha > 2/3\,, \\ &\frac{1-\cos x^\alpha}{x^{3/2}\ln(1+x^{3\alpha-2})} \sim \frac{x^{4/3}}{2\ln 2 x^{3/2}} = \frac{1}{2\ln 2\, x^{1/6}} && \text{se} \quad \alpha = 2/3\,, \\ &\frac{1-\cos x^\alpha}{x^{3/2}\ln(1+x^{3\alpha-2})} \sim \frac{x^{2\alpha}}{2(2-3\alpha)x^{3/2}|\ln x|} = \frac{1}{2(2-3\alpha)x^{3/2-2\alpha}|\ln x|} && \text{se} \quad 0 < \alpha < 2/3\,. \end{aligned}$$

Si deduce che

- se $\alpha > 2/3$, l'integrale converge se e solo se $\alpha - 1/2 < 1$, e quindi per $2/3 < \alpha < 3/2$;
- se $\alpha = 2/3$, l'integrale converge;
- se $0 < \alpha < 2/3$, l'integrale converge se e solo se $3/2 - 2\alpha < 1$, e quindi per $1/4 < \alpha < 2/3$.

Allora l'integrale dato converge se e solo se $1/4 < \alpha < 3/2$.

Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x^2(4y+1) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Procediamo per separazione di variabili. Deve essere
$$\frac{y'}{4y+1} = x^2\,.$$
Integrando si ottiene
$$\frac{1}{4}\ln|4y(x)+1| = \frac{1}{3}x^3 + c\,.$$
Sfruttando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava
$$c = \frac{1}{4}\ln|4y(0)+1| = \frac{1}{4}\ln 5\,,$$
da cui
$$\ln|4y(x)+1| = \frac{4}{3}x^3 + \ln 5\,.$$
Poiché $4y(0) + 1 = 5 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy soddisfa
$$\ln(4y(x)+1) = \frac{4}{3}x^3 + \ln 5\,.$$
Risolvendo l'equazione si ottiene
$$y(x) = \frac{1}{4}\big(5e^{4x^3/3} - 1\big)\,.$$

Soluzione della parte di esercizi del Tema 2

Esercizio 1

Sia data la funzione f definita da
$$f(x) = |x-3|e^{\frac{1}{x-2}}\,.$$
[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Asintoti.
  - $x = -2$ è asintoto verticale
  - $y = x - 2$ è asintoto obliquo a $+\infty$
  - $y = -x + 2$ è asintoto obliquo a $-\infty$

- Derivabilità. Per $x \neq 3$ si ottiene

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x-3)e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2}\,.$$

Allora

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2} = e = f'_+(3)\,,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\lim_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2} = -e = f'_-(3)\,,$$

e quindi $x = 3$ è punto angoloso.

- Intervalli di monotonia.

  Essendo $x^2 - 5x + 7 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $\mathrm{sgn}(x-3) > 0$, cioè se e solo se $x > 3$. Allora

  - f è crescente in $[3, +\infty[$;
  - f è decrescente in $]-\infty, 2[$ e in $]2,3]$;
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x = 3$, come già osservato, mentre non ha punti di massimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

$$f''(x) = -\,\mathrm{sgn}(x-3)e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x-1}{(x-2)^4}$$

  - f è convessa in $[1, 2[$ e in $]2, 3]$;
  - f è concava in $]-\infty, 1]$ e in $[3, +\infty[$;
  - f ha un punti di flesso in $x = 1$ e in $x = 3$.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 2.

Esercizio 2

1. Stabilire se ognuno dei seguenti integrali impropri è convergente o divergente

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\, x^{3/2}}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})}\,dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x^{3/2}}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})}\,dx\,.$$

2. Trovare tutti e soli gli $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\, x^{\alpha}}{x^{4/3}\ln(1+x^{2\alpha-2})}\,dx\,.$$

Svolgimento

1. Studiamo il primo integrale. La funzione integranda è positiva. Per $x \to 0$ si ha

$$\mathrm{sen}\, x^{3/2} \sim x^{3/2}\,, \qquad \ln(1+x^{2/3}) \sim x^{2/3}\,,$$

   da cui si deduce che

$$\frac{\mathrm{sen}\, x^{3/2}}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{4/3}x^{2/3}} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

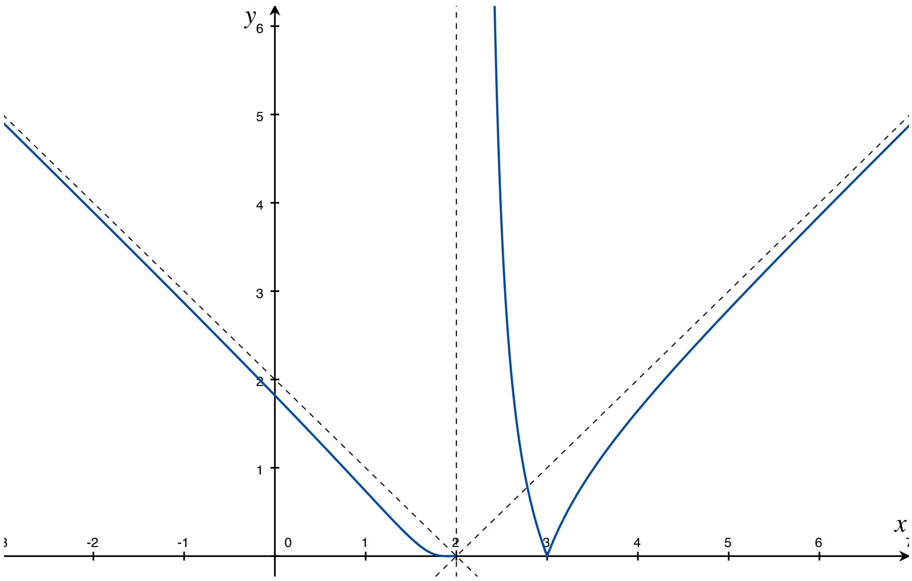

Figura 2: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 2

e quindi l'integrale è convergente.

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x^{3/2}}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})}\right| \le \frac{1}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})}\,,$$

e che per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+x^{2/3}) \sim \ln x$. Allora

$$\frac{1}{x^{4/3}\ln(1+x^{2/3})} \sim \frac{1}{x^{4/3}\ln x} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,,$$

e quindi l'integrale dato è convergente grazie al criterio del confronto.

2. Si osservi che, essendo $\alpha > 0$, per $x \to 0$ si ha

$$\operatorname{sen} x^{\alpha} \sim x^{\alpha}\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^{2\alpha-2}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ \ln 2 & \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{cases}$$

In particolare, per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} &\ln(1+x^{2\alpha-2}) \sim x^{2\alpha-2} && \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ &\ln(1+x^{2\alpha-2}) = \ln 2 && \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ &\ln(1+x^{2\alpha-2}) \sim (2-2\alpha)|\ln x| && \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{4/3}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x^\alpha}{x^{4/3}x^{2\alpha-2}} = \frac{1}{x^{\alpha-2/3}} \qquad \text{se} \quad \alpha > 1\,,$$

$$\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{4/3}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x}{2\ln 2 x^{4/3}} = \frac{1}{\ln 2\, x^{1/3}} \qquad \text{se} \quad \alpha = 1\,,$$

$$\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{4/3}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x^\alpha}{(2-2\alpha)x^{4/3}|\ln x|} = \frac{1}{(2-2\alpha)x^{4/3-\alpha}|\ln x|} \qquad \text{se} \quad 0 < \alpha < 2/3\,.$$

Si deduce che

- se $\alpha > 1$, l'integrale converge se e solo se $\alpha - 2/3 < 1$, e quindi per $1 < \alpha < 5/3$;
- se $\alpha = 1$, l'integrale converge;
- se $0 < \alpha < 1$, l'integrale converge se e solo se $4/3 - \alpha < 1$, e quindi per $1/3 < \alpha < 1$.

Allora l'integrale dato converge se e solo se $1/3 < \alpha < 5/3$.

Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x(2y+1) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Procediamo per separazione di variabili. Deve essere

$$\frac{y'}{2y+1} = x\,.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln|2y(x)+1| = \frac{1}{2}x^2 + c\,.$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava

$$c = \frac{1}{2}\ln|2y(0)+1| = \frac{1}{2}\ln 3\,,$$

da cui

$$\ln|2y(x)+1| = x^2 + \ln 3\,.$$

Poiché $2y(0) + 1 = 3 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy soddisfa

$$\ln(2y(x)+1) = x^2 + \ln 3\,.$$

Risolvendo l'equazione si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(3e^{x^2} - 1\big)\,.$$

Soluzione della parte di esercizi del Tema 3

Esercizio 1

Sia data la funzione f definita da

$$f(x) = |x-4|e^{\frac{1}{x-3}}\,.$$

[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Asintoti.
  - $x = 3$ è asintoto verticale
  - $y = x - 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$
  - $y = -x + 3$ è asintoto obliquo a $-\infty$
- Derivabilità. Per $x \neq 4$ si ottiene

  $$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-4)e^{\frac{1}{x-3}}\frac{x^2-7x+13}{(x-3)^2}\,.$$

  Allora

  $$\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{x-3}}\frac{x^2-7x+13}{(x-3)^2} = e = f'_+(4)\,,$$

  $$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = -\lim_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{x-3}}\frac{x^2-7x+13}{(x-3)^2} = -e = f'_-(4)\,,$$

  e quindi $x = 3$ è punto angoloso.
- Intervalli di monotonia.

  Essendo $x^2 - 7x + 13 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(x-4) > 0$, cioè se e solo se $x > 4$. Allora
  - f è crescente in $[4, +\infty[$;
  - f è decrescente in $]-\infty, 3[$ e in $]3,4]$;
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x = 4$, come già osservato, mentre non ha punti di massimo.
- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

  $$f''(x) = -\operatorname{sgn}(x-4)e^{\frac{1}{x-3}}\frac{x-2}{(x-3)^4}$$

  - f è convessa in $[2, 3[$ e in $]3, 4]$;
  - f è concava in $]-\infty, 2]$ e in $[4, +\infty[$;
  - f ha un punti di flesso in $x = 2$ e in $x = 4$.
- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 3.

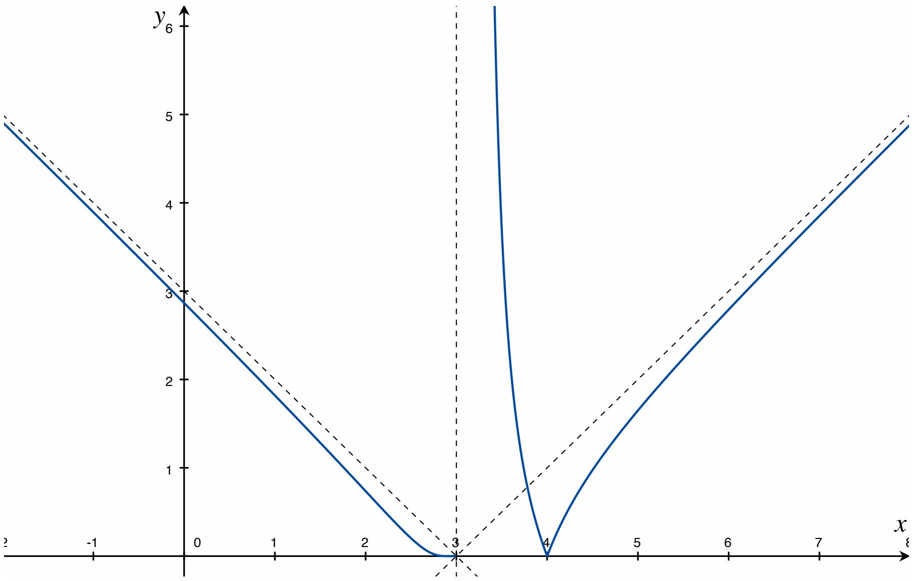

Figura 3: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 3

Esercizio 2

1. Stabilire se ognuno dei seguenti integrali impropri è convergente o divergente

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})}\,dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})}\,dx\,.$$

2. Trovare tutti e soli gli $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{5/3}\ln(1+x^{3\alpha-3})}\,dx\,.$$

Svolgimento

1. Studiamo il primo integrale. La funzione integranda è positiva. Per $x \to 0$ si ha

$$\operatorname{sen} x^2 \sim x^2\,, \qquad \ln(1+x^{4/3}) \sim x^{4/3}\,,$$

da cui si deduce che

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})} \sim \frac{x^2}{x^{5/3}x^{4/3}} = \frac{1}{x} \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi l'integrale è divergente.

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})}\right| \le \frac{1}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})}\,,$$

e che per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+x^{4/3}) \sim \ln x$. Allora

$$\frac{1}{x^{5/3}\ln(1+x^{4/3})} \sim \frac{1}{x^{5/3}\ln x} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,,$$

e quindi l'integrale dato è convergente grazie al criterio del confronto.

2. Si osservi che, essendo $\alpha > 0$, per $x \to 0$ si ha

$$\operatorname{sen} x^\alpha \sim x^\alpha\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^{3\alpha-3}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ \ln 2 & \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{cases}$$

In particolare, per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} &\ln(1+x^{3\alpha-3}) \sim x^{3\alpha-3} && \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ &\ln(1+x^{3\alpha-3}) = \ln 2 && \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ &\ln(1+x^{3\alpha-3}) \sim (3-3\alpha)|\ln x| && \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{5/3}\ln(1+x^{3\alpha-3})} \sim \frac{x^\alpha}{x^{5/3}x^{3\alpha-3}} = \frac{1}{x^{2\alpha-4/3}} && \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ &\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{5/3}\ln(1+x^{3\alpha-3})} \sim \frac{x}{2\ln 2 x^{5/3}} = \frac{1}{\ln 2\, x^{2/3}} && \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ &\frac{\operatorname{sen} x^\alpha}{x^{5/3}\ln(1+x^{3\alpha-3})} \sim \frac{x^\alpha}{(3-3\alpha)x^{5/3}|\ln x|} = \frac{1}{(3-3\alpha)x^{5/3-\alpha}|\ln x|} && \text{se} \quad 0 < \alpha < 1\,. \end{aligned}$$

Si deduce che

- se $\alpha > 1$, l'integrale converge se e solo se $2\alpha - 4/3 < 1$, e quindi per $1 < \alpha < 7/6$;
- se $\alpha = 1$, l'integrale converge;
- se $0 < \alpha < 1$, l'integrale converge se e solo se $5/3 - \alpha < 1$, e quindi per $2/3 < \alpha < 1$.

Allora l'integrale dato converge se e solo se $2/3 < \alpha < 7/6$.

Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x(3y+2) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Procediamo per separazione di variabili. Deve essere

$$\frac{y'}{3y+2} = x\,.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{1}{3}\ln|3y(x)+2| = \frac{1}{2}x^2 + c\,.$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava

$$c = \frac{1}{3}\ln|3y(0)+2| = \frac{1}{3}\ln 5\,,$$

da cui
$$\ln|3y(x)+2| = \frac{3}{2}x^2 + \ln 5\,.$$
Poiché $3y(0)+2 = 5 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy soddisfa
$$\ln(3y(x)+2) = \frac{3}{2}x^2 + \ln 5\,.$$
Risolvendo l'equazione si ottiene
$$y(x) = \frac{1}{3}\big(5e^{3x^2/2} - 2\big)\,.$$

Soluzione della parte di esercizi del Tema 4

Esercizio 1

Sia data la funzione f definita da
$$f(x) = |x-2|e^{\frac{1}{x-1}}\,.$$
[Dominio, simmetrie, segno, continuità, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Asintoti.
  - $x = 1$ è asintoto verticale
  - $y = x - 1$ è asintoto obliquo a $+\infty$
  - $y = -x + 1$ è asintoto obliquo a $-\infty$
- Derivabilità. Per $x \neq 2$ si ottiene
$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-2)e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2}\,.$$
  Allora
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2} = e = f'_+(2)\,,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2} = -e = f'_-(2)\,,$$
  e quindi $x = 3$ è punto angoloso.
- Intervalli di monotonia.

  Essendo $x^2 - 3x + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(x-2) > 0$, cioè se e solo se $x > 2$. Allora
  - f è crescente in $[2, +\infty[$;
  - f è decrescente in $]-\infty, 1[$ e in $]1,2]$;
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x = 1$, come già osservato, mentre non ha punti di massimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

$$f''(x) = -\operatorname{sgn}(x-2)e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x}{(x-1)^4}$$

  - f è convessa in $[0,1[$ e in $]1,2]$;
  - f è concava in $]-\infty,0]$ e in $[2,+\infty[$;
  - f ha un punti di flesso in $x=0$ e in $x=2$.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 4.

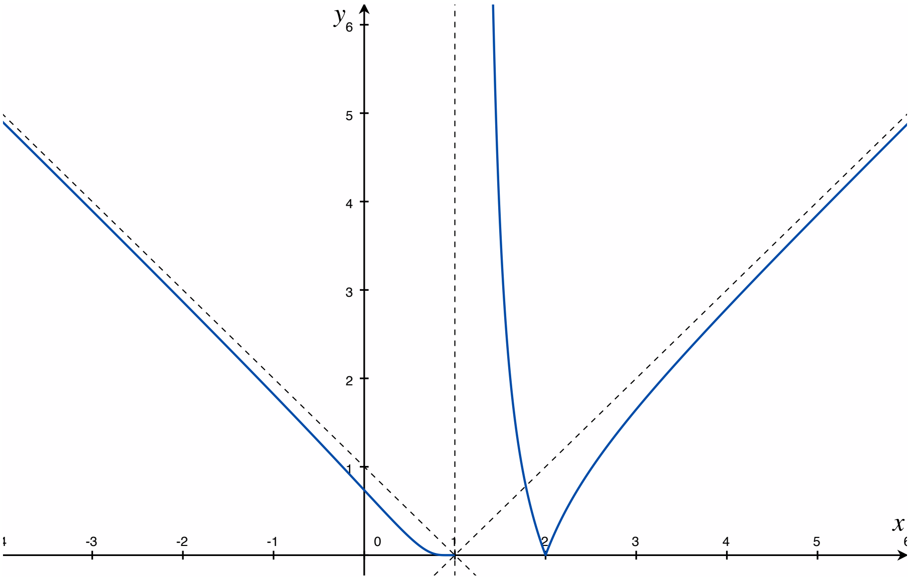

Figura 4: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 4

Esercizio 2

1. Stabilire se ognuno dei seguenti integrali impropri è convergente o divergente

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})}\,dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x^2}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})}\,dx\,.$$

2. Trovare tutti e soli gli $\alpha > 0$ per i quali converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^{\alpha/2}}{x^{7/4}\ln(1+x^{2\alpha-2})}\,dx\,.$$

Svolgimento

1. Studiamo il primo integrale. La funzione integranda è positiva. Per $x \to 0$ si ha

$$1-\cos x^2 \sim x^4\,, \qquad \ln(1+x^{5/2}) \sim x^{5/2}\,,$$

da cui si deduce che

$$\frac{1-\cos x^2}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})} \sim \frac{x^4}{x^{7/4}x^{5/2}} = \frac{1}{x^{1/4}} \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi l'integrale è convergente.

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che

$$0- \leq \frac{1-\cos x^2}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})} \leq \frac{2}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})}\,,$$

e che per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+x^{5/2}) \sim \ln x$. Allora

$$\frac{1}{x^{7/4}\ln(1+x^{5/2})} \sim \frac{1}{x^{7/4}\ln x} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,,$$

e quindi l'integrale dato è convergente grazie al criterio del confronto.

2. Si osservi che, essendo $\alpha > 0$, per $x \to 0$ si ha

$$1 - \cos x^{\alpha/2} \sim x^{\alpha}\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^{2\alpha-2}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ \ln 2 & \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{cases}$$

In particolare, per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} &\ln(1+x^{2\alpha-2}) \sim x^{2\alpha-2} && \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ &\ln(1+x^{2\alpha-2}) = \ln 2 && \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ &\ln(1+x^{2\alpha-2}) \sim (2-2\alpha)|\ln x| && \text{se} \quad \alpha < 1\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &\frac{1-\cos x^{\alpha/2}}{x^{7/4}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x^{\alpha}}{x^{7/4}x^{2\alpha-2}} = \frac{1}{x^{\alpha-1/4}} && \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ &\frac{1-\cos x^{\alpha/2}}{x^{7/4}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x}{2\ln 2\, x^{7/4}} = \frac{1}{\ln 2\, x^{3/4}} && \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ &\frac{1-\cos x^{\alpha/2}}{x^{7/4}\ln(1+x^{2\alpha-2})} \sim \frac{x^{\alpha}}{(2-2\alpha)x^{7/4}|\ln x|} = \frac{1}{(2-2\alpha)x^{7/4-\alpha}|\ln x|} && \text{se} \quad 0 < \alpha < 1\,. \end{aligned}$$

Si deduce che

- se $\alpha > 1$, l'integrale converge se e solo se $\alpha - 1/4 < 1$, e quindi per $1 < \alpha < 5/4$;
- se $\alpha = 1$, l'integrale converge;
- se $< 0 < \alpha < 1$, l'integrale converge se e solo se $7/4 - \alpha < 1$, e quindi per $3/4 < \alpha < 1$.

Allora l'integrale dato converge se e solo se $3/4 < \alpha < 5/4$.

Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^3(5y+2) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Procediamo per separazione di variabili. Deve essere

$$\frac{y'}{5y+2} = x^3 \,.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{1}{5} \ln|5y(x)+2| = \frac{1}{4}x^4 + c \,.$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava

$$c = \frac{1}{5} \ln|5y(0)+2| = \frac{1}{5} \ln 7 \,,$$

da cui

$$\ln|5y(x)+2| = \frac{5}{4}x^4 + \ln 7 \,.$$

Poiché $5y(0) + 2 = 7 > 0$, la soluzione del problema di Cauchy soddisfa

$$\ln(5y(x)+2) = \frac{5}{4}x^4 + \ln 7 \,.$$

Risolvendo l'equazione si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{5}\bigl(7e^{5x^2/4} - 2\bigr) \,.$$