Analisi Matematica 1 - a.a. 2017/2018 - Terzo appello

Soluzione del test

Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	E	A	D	C	C	B	D	A

Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	C	D	A	E	B	A

Test C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	A	D	A	B	A	B	C	C

Test D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	C	E	A	D	D	B	A	E

Soluzione della parte di esercizi del Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \left[1 + (x-2)^2\right] \arctan|x-2| \,.$$

[Dominio, eventuali simmetrie, segno, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo ed assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità ed eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. Banalmente, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
- Simmetrie. Si ha

  $$f(-x) = \left[1 + (-x-2)^2\right] \arctan|-x-2| = \left[1 + (x+2)^2\right] \arctan|x+2|$$

  da cui si deduce che f non è pari nè dispari.
- Segno. Banalmente, essendo $\arctan t \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Inoltre, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2$, che quindi è punto di minimo assoluto.
- Continuità. Essendo prodotto e composizione di funzioni continue, f è continua nel suo dominio.

- Asintoti. Per ovvi motivi la funzione non ammette asintoti verticali. Poiché
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+(x-2)^2\right]=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\arctan|x-2|=\frac{\pi}{2}$$
si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty\,,$$
e quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali.

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+(x-2)^2}{x}=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+(x-2)^2}{x}=-\infty\,,$$
si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty\,,$$
e quindi la funzione non ammette asintoti obliqui.

- Derivabilità. Poiché la funzione valore assoluto non è derivabile nell'origine, a priori non possiamo derivare f in $x=2$. Per $x\neq 2$ si ottiene
$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-2)\arctan|x-2|+\left[1+(x-2)^2\right]\frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{1+|x-2|^2}\\&=2(x-2)\arctan|x-2|+\operatorname{sgn}(x-2)\,.\end{aligned}$$
In particolare
$$f'(x)=\begin{cases}2(x-2)\arctan|x-2|+1 & \text{se}\quad x>2\,,\\ 2(x-2)\arctan|x-2|-1 & \text{se}\quad x<2\,,\end{cases}$$
da cui
$$\lim_{x\to2^+}f'(x)=1\,,\qquad \lim_{x\to2^-}f'(x)=-1\,,$$
e quindi $x=2$ è punto angoloso.

- Intervalli di monotonia.

  Essendo $\arctan|x-2|\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si deduce che $f'(x)>0$ se e solo se $x>2$. Allora
  - f è crescente in $[2,+\infty[$;
  - f è decrescente in $]-\infty,2]$;
  - f ha un punto di minimo assoluto in $x=2$, come già osservato, mentre non ha punti di massimo.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

  f è derivabile due volte per $x\neq 2$, $x\in\operatorname{dom} f$. In tali punti si ha
$$\begin{aligned}f''(x)&=2\arctan|x-2|+2\frac{(x-2)\operatorname{sgn}(x-2)}{1+(x-2)^2}\\&=2\arctan|x-2|+2\frac{|x-2)|}{1+(x-2)^2}\,,\end{aligned}$$
da cui si deduce che $f''(x)>0$ per ogni $x\in\operatorname{dom} f$, $x\neq 2$. Essendo anche
$$f'_+(2)=1>-1=f'_-(2)\,,$$
si ottiene che f è convessa in $\mathbb{R}$.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

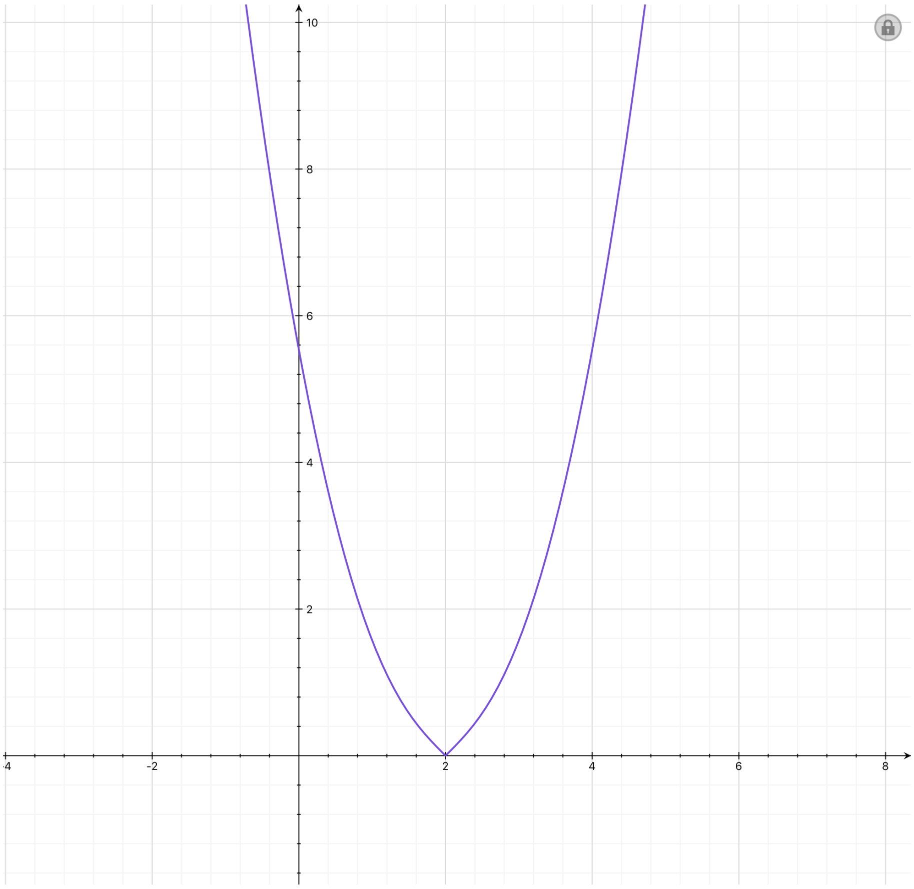

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 del tema 1

Esercizio 2

1. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \, \frac{e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n)}{\cos(1/n)} \, .$$

2. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \, \frac{e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n)}{\cos(1/n)} \, ,$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

1. Poiché
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\, , \quad \operatorname{sen}(1/n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)\, ,$$
si ottiene
$$e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3) = \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\, .$$

Essendo $\cos(1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n)}{\cos(1/n)} = \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \right] = \frac{1}{2} .$$

2. Dal punto precedente si deduce che

$$\frac{e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n)}{\cos(1/n)} \sim \frac{1}{2n^2} ,$$

e quindi

$$n^{\alpha-1} \frac{e^{1/n} - 1 - \operatorname{sen}(1/n)}{\cos(1/n)} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2n^2} = \frac{1}{2n^{3-\alpha}} .$$

Allora la serie risulta a termini definitivamente positivi e, per il criterio asintotico del confronto, converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, cioè se e solo se $\alpha < 2$.

Esercizio 3

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx .$$

Svolgimento

Procediamo per integrazione per parti. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx \right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx ,
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{5}{4} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^{\pi} - 2}{4} ,$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5} .$$