Analisi Matematica 1 - a.a. 2017/2018 - Quarto appello

Soluzione del test

Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	B	B	C	A	D	C	C	D

Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	E	B	A	E	E	D	B

Test C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	D	B	E	C	A	C	D	D

Test D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	A	A	B	E	A	E	B	D

Soluzione della parte di esercizi del Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = (x+1)\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) .$$

[Dominio, eventuali simmetrie, segno, eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo ed assoluto, studio della derivata seconda, intervalli di convessità e concavità ed eventuali punti di flesso, abbozzo del grafico]

Svolgimento

- Dominio. Deve essere $x+1 \neq 0$ e
$$\frac{2x}{x+1} > 0\,,$$
da cui si ottiene $\mathrm{dom}\, f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Simmetrie. Poiché il dominio $\mathrm{dom}\, f$ della funzione non è simmetrico rispetto ad $x = 0$, f non è pari nè dispari.

- Segno. Poiché
$$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x}{x+1} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -1 \ \vee \ x \geq 1\,,$$
considerato che $x+1 \geq 0$ in $\mathrm{dom}\, f$ se e solo se $x > -1$, si ottiene che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$ e che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

- Continuità. Essendo prodotto e composizione di funzioni continue, f è continua nel suo dominio.

- Asintoti. Si ha
$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = -\infty\,,$$
e quindi la retta $x=0$ è asintoto verticale per f. Inoltre
$$\lim_{x\to -1^-}(x+1)\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1^-}\big[(x+1)\ln|2x| - (x+1)\ln|x+1|\big] = 0\,,$$
e quindi f è prolungabile per continuità in $x=-1$ ponendo $f(-1)=0$. Allora d'ora in poi considereremo f definita e uguale a zero in $x=-1$.

  Ricerchiamo eventuali asintoti orizzontali. Poiché
$$\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln 2\,,$$
si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,,$$
e quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali.

  Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Poiché
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln 2\,,$$
e
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\big[f(x) - x\ln 2\big] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[(x+1)\ln 2 + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x\ln 2\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln 2 + (x+1)\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln 2 + (x+1)\left(-\frac{1}{x+1} + o\big(1/(x+1)\big)\right)\right] = \ln 2 - 1\,,\end{aligned}$$
la retta di equazione $y = x\ln 2 + \ln 2 - 1$ è asintoto obliquo completo per f.

- Derivabilità. Per $x\neq -1$ la funzione è derivabile perché prodotto e composizione di funzioni derivabili, e vale
$$f'(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) + (x+1)\cdot\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\,.$$
Inoltre, poiché f è continua in $x=-1$ e vale
$$\lim_{x\to -1} f'(x) = +\infty\,,$$
per il teorema del limite della derivata la funzione non è derivabile in $x=-1$.

  Per studiare il segno di f' conviene prima studiare f''.

- Derivata seconda e intervalli di convessità/concavità.

  f è derivabile due volte per $x \neq -1$, $x \in \operatorname{dom} f$. In tali punti si ha

$$f''(x) = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x+1)}\,,$$

  da cui si deduce che $f''(x) \geq 0$ in $\operatorname{dom} f$ se e solo se $x < -1$. Allora f è convessa in $]-\infty, -1]$ e concava in $]0, +\infty[$.

- Intervalli di monotonia. Poiché $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -1$, si ottiene che f' è crescente in $]-\infty, -1[$ e decrescente in $]0, +\infty[$. Essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \ln 2 > 0\,,$$

  si deduce che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, e quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, -1]$ e in $]0, +\infty[$.

- Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

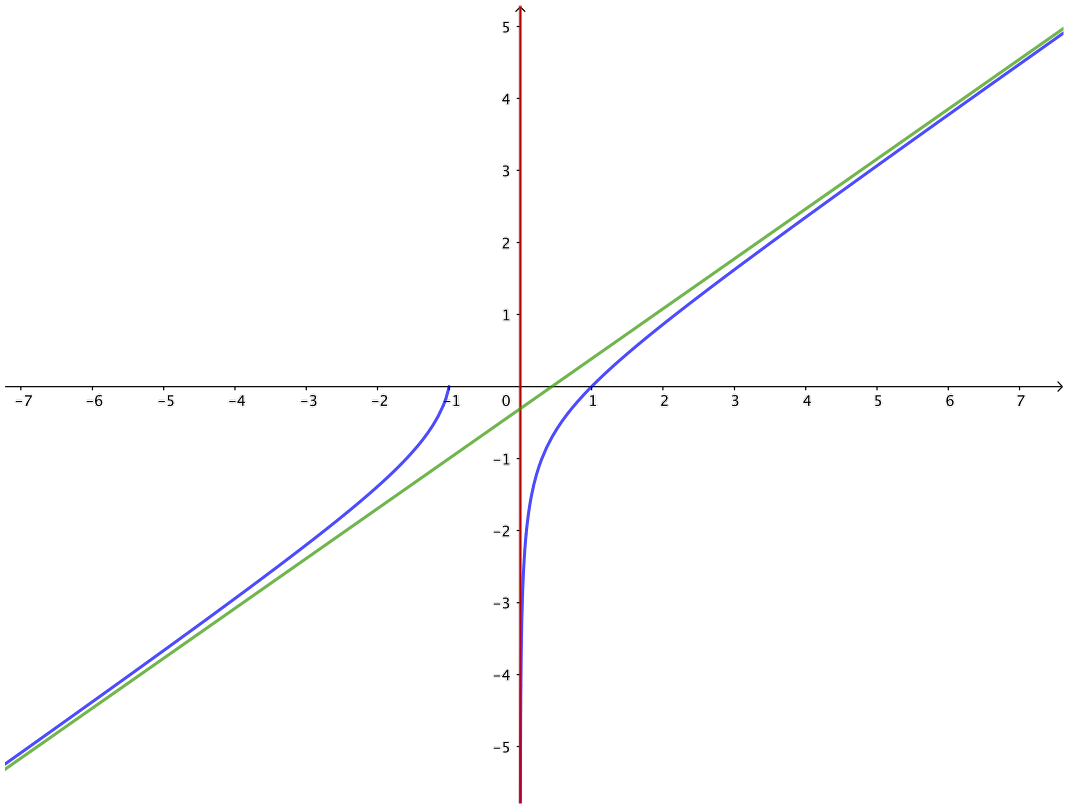

Figura 1: Il grafico (in blu) della funzione; in verde l'asintoto obliquo, in rosso quello verticale

Esercizio 2

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^\alpha} - \operatorname{sen}(1/n) \right|$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento

La serie è a termini non negativi e quindi siamo autorizzati ad utilizzare il criterio asintotico del confronto. Grazie al fatto che

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0\,,$$

si ha

$$\operatorname{sen}(1/n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3) \quad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Allora, per $n \to +\infty$ vale

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - \operatorname{sen}(1/n)\right| = \left|\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)\right| \sim \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha} & \text{se} \quad 0 < \alpha < 1\,, \\ \dfrac{1}{6n^3} & \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad \alpha > 1\,, \end{cases}$$

da cui si deduce che la serie data converge se e solo se $\alpha = 1$.

Esercizio 3

1. Calcolare per parti
$$\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)\, dx\,.$$

2. Utilizzando il metodo della separazione delle variabili, calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y+1)\arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) dx &= x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \int x \cdot \frac{1}{1+1/(x+1)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\, dx \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \int \frac{x}{(x+1)^2+1}\, dx = x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{(x+1)^2+1} \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left[1+(x+1)^2\right] - \arctan(x+1) + c \\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln\sqrt{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + c\,.\end{aligned}$$

2. Procedendo per separazione di variabili si ottiene
$$\ln|y+1| = \int \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)\, dx\,,$$

e quindi

$$\ln|y(x)+1| = x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln\sqrt{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + c\,.$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(0)=0$ si ottiene

$$0 = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + c\,,$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\,.$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy soddisfa

$$\ln|y(x)+1| = x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln\sqrt{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\,,$$

cioè

$$|y(x)+1| = \exp\left[x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln\sqrt{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right]\,.$$

Essendo $y(0)+1 = 1 > 0$, si ottiene che

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp\left[x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + \ln\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{2}} - \arctan(x+1) + \frac{\pi}{4}\right] - 1 \\ &= \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{2}}\exp\left[x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \arctan(x+1) + \frac{\pi}{4}\right] - 1 \end{aligned}$$

è la soluzione cercata.