ANALISI MATEMATICA 1 - 11/02/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Il candidato deve riportare nella griglia le risposte che ritiene corrette.
Al termine della prova il candidato deve riconsegnare questo foglio.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
La prova è superata se si è risposto correttamente ad almeno 7 dei quesiti assegnati.

Tempo a disposizione: 30 minuti.

Primo Appello - Test 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Il dominio della funzione $f(x) = \ln(x-1)$ è

A) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ B) $\mathbb{R}$ C) $]1, +\infty[$ D) $[1, +\infty[$ E) Nessuna delle precedenti.

2. L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} (5x^4 + 3x^2 + 1)\, dx$ vale

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) Nessuna delle precedenti.

3. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha} \ln n}$, per quale tra i seguenti valori di α essa converge?

A) $\alpha = 1$ B) $\alpha = 0$ C) $\alpha = \dfrac{1}{3}$ D) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ E) Nessuna delle precedenti.

4. Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ vale

A) 1 B) $+\infty$ C) e D) e^2 E) Nessuna delle precedenti.

5. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi. Quale tra le seguenti condizioni assicura la convergenza della serie?

A) $\sqrt[n]{a_n} \le 2\ \forall n$ B) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{1}{3}\ \forall n$ C) $\lim_n a_n = 0$ D) $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ E) Nessuna delle precedenti.

6. Sia $f(x) = \ln(1+2x) + \operatorname{sen} x$. Allora $f'(0)$ vale

A) 0 B) 2 C) 3 D) 1 E) Nessuna delle precedenti.

7. Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^5}{n}$ vale

A) $+\infty$ B) 1 C) e D) 0 E) Nessuna delle precedenti.

8. Per quale tra i seguenti valori di α l'integrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha/2} + 1}\, dx$ converge?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) Nessuna delle precedenti.

9. Sia $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{e^{2t}}{|t| + 1}\, dt$. Allora $F'(0)$ vale

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Nessuna delle precedenti.

10. Data l'equazione differenziale $y' = y^2$, quale tra le seguenti funzioni è soluzione?

A) $y(t) = 1/t$ B) $y(t) = -1/t$ C) $y(t) = t^2$ D) $y(t) = \operatorname{sen} t$ E) Nessuna delle precedenti.

ANALISI MATEMATICA 1 - 11/02/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Il candidato deve riportare nella griglia le risposte che ritiene corrette.
Al termine della prova il candidato deve riconsegnare questo foglio.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
La prova è superata se si è risposto correttamente ad almeno 7 dei quesiti assegnati.

Tempo a disposizione: 30 minuti.

Primo Appello - Test 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Il $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$ vale

A) 1 B) e^2 C) $+\infty$ D) $e^{\frac{1}{2}}$ E) Nessuna delle precedenti.

2. Sia $F(x)=\int_0^x \frac{e^{t-1}}{t^2+1}\,dt$. Allora $F'(1)$ vale

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 3 E) Nessuna delle precedenti.

3. Data l'equazione differenziale $y'=3y$, quale tra le seguenti funzioni è soluzione?

A) $y(t)=\cos(3t)$ B) $y(t)=\text{sen}(3t)$ C) $y(t)=e^{3t}$ D) $y(t)=3e^t$ E) Nessuna delle precedenti.

4. Il dominio della funzione $f(x)=\ln|x-1|$ è

A) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ B) $[1,+\infty[$ C) $]1,+\infty[$ D) $\mathbb{R}$ E) Nessuna delle precedenti.

5. Il $\lim_{n\to+\infty} n^5 e^{-n/2}$ vale

A) $+\infty$ B) e C) 0 D) 1 E) Nessuna delle precedenti.

6. Sia $f(x)=e^{2x}\cos x$. Allora $f'(0)$ vale

A) 0 B) 1 C) e D) 2 E) Nessuna delle precedenti.

7. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi. Quale tra le seguenti condizioni assicura la convergenza della serie?

A) $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1\ \forall n$ B) $\lim_n a_n = 0$ C) $\sqrt[n]{a_n}\le 3\ \forall n$ D) $a_n\sim\frac{1}{n}$ E) Nessuna delle precedenti.

8. L'integrale $\int_0^3 \frac{1}{x^{\alpha/2}}\,dx$ converge per tutti e soli gli α nell'insieme

A) $]-\infty,0]$ B) $]-\infty,1[$ C) $]2,+\infty[$ D) $]-\infty,2[$ E) Nessuna delle precedenti.

9. L'integrale $\int_0^1 (16x^7+10x^4+1)\,dx$ vale

A) 27 B) 10 C) 5 D) 20 E) Nessuna delle precedenti.

10. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(2\alpha)^n$, per quale tra i seguenti valori di α essa converge?

A) $\alpha=1/2$ B) $\alpha=1/3$ C) $\alpha=1$ D) $\alpha=-1/2$ E) Nessuna delle precedenti.

ANALISI MATEMATICA 1 - 11/02/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Il candidato deve riportare nella griglia le risposte che ritiene corrette.
Al termine della prova il candidato deve riconsegnare questo foglio.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
La prova è superata se si è risposto correttamente ad almeno 7 dei quesiti assegnati.

Tempo a disposizione: 30 minuti.

Primo Appello - Test 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{1}{y}$, quale tra le seguenti funzioni è soluzione?

A) $y(t) = \sqrt{t}$ B) $y(t) = e^{-t}$ C) $y(t) = e^{1/t}$ D) $y(t) = \sqrt{2t}$ E) Nessuna delle precedenti.

2. Sia $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$. Allora $f'(0)$ vale

A) 2 B) 1 C) -2 D) e E) Nessuna delle precedenti.

3. Sia $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{t+2}\,dt$. Allora $F'(0)$ vale

A) 2 B) 1 C) 0 D) 1/2 E) Nessuna delle precedenti.

4. L'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{|x-2|^{\alpha+1}}\,dx$ converge per tutti e soli gli α nell'insieme

A) $]0,+\infty[$ B) $]1,+\infty[$ C) $]-\infty,1[$ D) $]-\infty,0[$ E) Nessuna delle precedenti.

5. Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{e^n}$ vale

A) $+\infty$ B) 1 C) e D) 0 E) Nessuna delle precedenti.

6. L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2\operatorname{sen}(2x) + 5x^4)\,dx$ vale

A) 4 B) 2 C) 6 D) 5 E) Nessuna delle precedenti.

7. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi. Quale tra le seguenti condizioni assicura la convergenza della serie?

A) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 2\ \forall n$ B) $\displaystyle\lim_n a_n = 0$ C) $\sqrt[n]{a_n} \le 1/2\ \forall n$ D) $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ E) Nessuna delle precedenti.

8. Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x/2}$ vale

A) 1 B) $+\infty$ C) e D) $e^{\frac{1}{2}}$ E) Nessuna delle precedenti.

9. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}\ln n}$, per quale tra i seguenti valori di α essa converge?

A) $\alpha = 1/2$ B) $\alpha = 1$ C) $\alpha = 2$ D) $\alpha = -1/2$ E) Nessuna delle precedenti.

10. Il dominio della funzione $f(x) = \ln(2-x)$ è

A) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ B) $]-\infty,2[$ C) $]2,+\infty[$ D) $]-\infty,2]$ E) Nessuna delle precedenti.

ANALISI MATEMATICA 1 - 11/02/2019
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Il candidato deve riportare nella griglia le risposte che ritiene corrette.
Al termine della prova il candidato deve riconsegnare questo foglio.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
La prova è superata se si è risposto correttamente ad almeno 7 dei quesiti assegnati.

Tempo a disposizione: 30 minuti.

Primo Appello - Test 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie a termini positivi. Quale tra le seguenti condizioni assicura la convergenza della serie?

A) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 3 \ \forall n$ B) $\lim_n a_n = 0$ C) $a_n \sim \frac{1}{n^3}$ D) $\sqrt[n]{a_n} \leq 2 \ \forall n$ E) Nessuna delle precedenti.

2. Per quale tra i seguenti valori di α l'integrale $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{|x|^{2\alpha}}\, dx$ converge?

A) $\alpha = 1/2$ B) $\alpha = 1$ C) $\alpha = 1/3$ D) $\alpha = 0$ E) Nessuna delle precedenti.

3. Sia $f(x) = e^{-x} + \operatorname{sen}(2x)$. Allora $f'(0)$ vale

A) 2 B) 1 C) -2 D) e E) Nessuna delle precedenti.

4. Data l'equazione differenziale $y' = 2ty$, quale tra le seguenti funzioni è soluzione?

A) $y(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ B) $y(t) = e^{2t}$ C) $y(t) = e^{t^2}$ D) $y(t) = e^{-t^2}$ E) Nessuna delle precedenti.

5. Il dominio della funzione $f(x) = \ln|2-x|$ è

A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ B) $]-\infty, 2[$ C) $]2, +\infty[$ D) $]0, +\infty[$ E) Nessuna delle precedenti.

6. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$, per quale tra i seguenti valori di α essa converge?

A) $\alpha = 2$ B) $\alpha = 3$ C) $\alpha = -2$ D) $\alpha = 4$ E) Nessuna delle precedenti.

7. Il $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^n}$ vale

A) 2 B) 1 C) e D) 0 E) Nessuna delle precedenti.

8. Sia $F(x) = \int_2^x \frac{\cos t}{|t|+2}\, dt$. Allora $F'(0)$ vale

A) 0 B) 1 C) 2 D) $1/2$ E) Nessuna delle precedenti.

9. Il $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$ vale

A) e^{-1} B) $e^{\frac{1}{2}}$ C) 1 D) $+\infty$ E) Nessuna delle precedenti.

10. L'integrale $\int_0^{\pi} (\cos x + 3x^2 + \pi^2)\, dx$ vale

A) 3 B) π^2 C) 2π D) $2\pi^3$ E) Nessuna delle precedenti.

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: 40 minuti.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio con le risposte che ha saputo fornire.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 1 (parte di teoria)

Quesito 1 [5 punti]

1. Si dia la definizione di serie divergente.
2. Dimostrare che una serie a termini positivi non è indeterminata.

Quesito 2 [5 punti]

1. Si dia la definizione di funzione monotona crescente.
2. Si dimostri che, se una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è derivabile e monotona crescente, allora la sua derivata soddisfa $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: 40 minuti.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio con le risposte che ha saputo fornire.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 2 (parte di teoria)

Quesito 1 [5 punti]

1. Si dia la definizione di funzione continua.
2. Si enunci e dimostri il teorema di Lagrange.

Quesito 2 [5 punti]

1. Si dia la definizione di serie convergente.
2. Si dimostri che il termine generale di una serie convergente è infinitesimo.

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: 40 minuti.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio con le risposte che ha saputo fornire.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 3 (parte di teoria)

Quesito 1 [5 punti]

1. Si dia la definizione di punto di massimo relativo per una funzione.
2. Si enunci e dimostri il teorema di Fermat.

Quesito 2 [5 punti]

1. Si dia la definizione di serie convergente.
2. Si dimostri che il termine generale di una serie convergente è infinitesimo.

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: 40 minuti.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio con le risposte che ha saputo fornire.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 4 (parte di teoria)

Quesito 1 [5 punti]

1. Si dia la definizione di serie divergente.
2. Dimostrare che una serie a termini positivi non è indeterminata.

Quesito 2 [5 punti]

1. Si definisca cosa significa che $f = o(g)$ per $x \to x_0$.
2. Si enunci e dimostri il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi.

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [9 punti]

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right) + \frac{x^2-1}{x-2}\,.$$

1. **[7 punti]** Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

   Sugg: per lo studio del segno può essere utile sapere che $\arctan t \geq -t$ se e solo se $t \geq 0$.

2. **[2 punti]** Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \to 1$ della funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-1/|x-1|}\,.$$

Esercizio 2 [7 punti]

1. **[4 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} x)^2 + \cosh x - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)}\,dx\,.$$

   Sugg.: ricordare che $\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$.

2. **[3 punti]** Trovare tutti e soli gli $\alpha \in]0,+\infty[$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} x)^{2\alpha} + \cosh x^\alpha - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)}\,dx\,.$$

Esercizio 3 [6 punti]

1. **[3 punti]** Utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{t}$, calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\,\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt\,.$$

2. **[3 punti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{t}\,\operatorname{sen}\sqrt{t} \\ y(\pi^2) = 1\,. \end{cases}$$

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [9 punti]

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x^2-8}{x-4}\right) - \frac{8-2x^2}{x-4}\,.$$

1. **[7 punti]** Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

   Sugg: per lo studio del segno può essere utile sapere che $\arctan t \geq -t$ se e solo se $t \geq 0$.

2. **[2 punti]** Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \to 2$ della funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-1/|x-2|}\,.$$

Esercizio 2 [7 punti]

1. **[4 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\ln(1+x))^2 + \operatorname{senh} x^2}{x^{7/3}\ln(x/3)}\,dx\,.$$

   Sugg.: ricordare che $\operatorname{senh} t = t + o(t)$ per $t \to 0$.

2. **[3 punti]** Trovare tutti e soli gli $\alpha \in]0,+\infty[$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\ln(1+x))^{2\alpha} + \operatorname{senh} x^{2\alpha}}{x^{7/3}\ln(x/3)}\,dx\,.$$

Esercizio 3 [6 punti]

1. **[3 punti]** Utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{2t}$, calcolare

$$\int_0^{\pi^2/8} \sqrt{2t}\,\operatorname{sen}\sqrt{2t}\,dt\,.$$

2. **[3 punti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{2t}\,\operatorname{sen}\sqrt{2t} \\ y(\pi^2/8) = 2\,. \end{cases}$$

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [9 punti]

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{2x-6}\right) - \frac{x^2-1}{2x-6}\,.$$

1. **[7 punti]** Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

   Sugg: per lo studio del segno può essere utile sapere che $\arctan t \geq -t$ se e solo se $t \geq 0$.

2. **[2 punti]** Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \to -1$ della funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-1/|x+1|}\,.$$

Esercizio 2 [7 punti]

1. **[4 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\cosh x^{3/2} - 1 + (\tan x)^3}{x^{7/2}\ln(x/4)}\,dx\,.$$

   Sugg.: ricordare che $\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$.

2. **[3 punti]** Trovare tutti e soli gli $\alpha \in]0, +\infty[$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\cosh x^{3\alpha/2} - 1 + (\tan x)^{3\alpha}}{x^{7/2}\ln(x/4)}\,dx\,.$$

Esercizio 3 [6 punti]

1. **[3 punti]** Utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{t}$, calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\cos\sqrt{t}\,dt\,.$$

2. **[3 punti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{t}\cos\sqrt{t} \\ y(\pi^2) = 1\,. \end{cases}$$

Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [9 punti]

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x-5} - \arctan\left(\frac{x^2-4}{x-5}\right).$$

1. **[7 punti]** Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

   Sugg: per lo studio del segno può essere utile sapere che $\arctan t \geq -t$ se e solo se $t \geq 0$.

2. **[2 punti]** Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \to -2$ della funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-1/|x+2|}.$$

Esercizio 2 [7 punti]

1. **[4 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\tan x)^4 + e^{x^2} - 1 - x^2}{x^{9/2}\ln(x/2)}\,dx.$$

   Sugg.: ricordare che $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$.

2. **[3 punti]** Trovare tutti e soli gli $\alpha \in]0, +\infty[$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{(\tan x)^{4\alpha} + e^{x^{2\alpha}} - 1 - x^{2\alpha}}{x^{9/2}\ln(x/2)}\,dx.$$

Esercizio 3 [6 punti]

1. **[3 punti]** Utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{2t}$, calcolare

$$\int_0^{\pi^2/8} \sqrt{2t}\cos\sqrt{2t}\,dt.$$

2. **[3 punti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{2t}\cos\sqrt{2t} \\ y(\pi^2/8) = 2. \end{cases}$$