Analisi Matematica 1 per IM - 23/01/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 1

Esercizio 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (x^2 - 4x)e^{-1/(x^2-4x)}.$$

1. Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

2. Determinare, se esiste, l'ordine di infinito di f per $x \to +\infty$.

Soluzione

1. Poniamo

$$h(t) \equiv te^{-1/t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e

$$g(x) \equiv x^2 - 4x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che

$$g(x) = x(x-4).$$

Il dominio di f risulta dunque essere $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. Inoltre

$$e^{-1/(x^2-4x)} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}.$$

Di conseguenza

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn}(x(x-4)),$$

e quindi

$$f(x) < 0 \iff 0 < x < 4,$$

e

$$f(x) > 0 \iff x < 0 \text{ oppure } x > 4.$$

Si verifica che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Di conseguenza,

$$\inf f = -\infty, \qquad \sup f = +\infty.$$

La funzione risulta essere di classe C^∞ in tutti i punti del suo dominio. Calcoliamo la derivata di f. Abbiamo

$$h'(t) = e^{-1/t}\left(\frac{t+1}{t}\right) \qquad \forall t \neq 0\,,$$

e

$$g'(x) \equiv 2x - 4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) = e^{-1/(x^2-4x)}\left(\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x}\right)(2x-4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,4\}\,.$$

Studiando il segno di $f'(x)$ otteniamo che

$$f'(x) < 0 \iff x < 0 \text{ oppure } 2-\sqrt{3} < x < 2 \text{ oppure } 2+\sqrt{3} < x < 4\,,$$

che

$$f'(x) > 0 \iff 0 < x < 2-\sqrt{3} \text{ oppure } 2 < x < 2+\sqrt{3} \text{ oppure } x > 4\,,$$

e che

$$f'(2-\sqrt{3}) = 0\,, \qquad f'(2) = 0\,, \qquad f'(2+\sqrt{3}) = 0\,.$$

Quindi

$$f \text{ è decrescente in }]-\infty, 0[\text{, in }]2-\sqrt{3}, 2[\text{ e in }]2+\sqrt{3}, 4[$$

e

$$f \text{ è crescente in }]0, 2-\sqrt{3}[\text{, }]2, 2+\sqrt{3}[\text{ e in }]4, +\infty[.$$

Possiamo inoltre caratterizzare i punti critici come segue:

$$\begin{aligned} &2-\sqrt{3} \text{ è punto di massimo relativo}\,,\\ &2 \text{ è punto di minimo relativo}\,,\\ &2+\sqrt{3} \text{ è punto di massimo relativo}\,. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0\,, \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,, \lim_{x\to 4^-} f'(x) = -\infty\,, \lim_{x\to 4^+} f'(x) = 0\,.$$

La funzione non ha asintoti obliqui. Le rette $x = 0$ e $x = 4$ sono asintoti verticali a destra e sinistra, rispettivamente.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

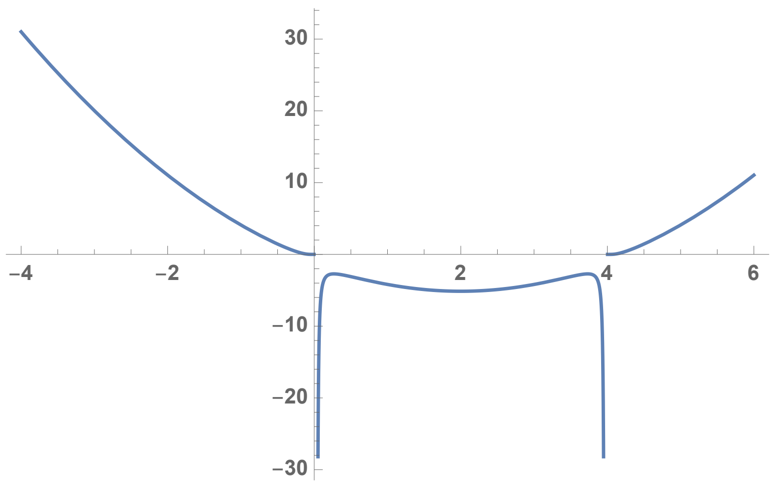

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 (gli assi hanno scale diverse)

2. Osserviamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1\,.$$
Di conseguenza, l'ordine di infinito a $+\infty$ risulta essere 2.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx\,,$$

Soluzione

Osserviamo che effettuando la sostituzione $t = e^x$ si ha
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx &= \int_1^e \frac{t+2}{t^2+2t+2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^e \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt + \int_1^e \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\log|t^2+2t+2|\Big|_{t=1}^{t=e} + \arctan(t+1)|\Big|_{t=1}^{t=e} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{e^2+2e+2}{5} + \arctan(e+1) - \arctan(2)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

1. Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}\ln(1+e^{-n})\,.$$

2. Discutere al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}\ln(1+|\alpha|^n)$$

Soluzione

1. Cominciamo osservando che
$$\frac{2^n}{n+1}\ln(1+e^{-n}) \sim \frac{2^n e^{-n}}{n+1} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n+1} \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$
Dal momento che
$$\frac{2}{e} < 1\,,$$
la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n+1}$$
converge grazie al criterio asintotico della radice, perché
$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{2}{e}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{2}{e} < 1\,,$$
dal criterio del confronto asintotico si deduce la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}\ln(1+e^{-n})\,.$$

2. Osserviamo che se $|\alpha| < 1$ si ha

$$\frac{2^n}{n^2+1}\ln(1+|\alpha|^n) \sim \frac{2^n|\alpha|^n}{n^2+1} = (|2\alpha|)^n\frac{1}{n^2+1} \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Inoltre

$$\lim_n \sqrt[n]{(|2\alpha|)^n\frac{1}{n^2+1}} = \lim_n |2\alpha|\,\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = |2\alpha|\,,$$

cosicché, per il criterio asintotico della radice, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|2\alpha|)^n\frac{1}{n^2+1}$$

converge se $|\alpha| < 1/2$ e diverge se $|\alpha| > 1/2$. Per $|\alpha| = 1/2$ il criterio asintotico della radice non fornisce informazioni, ma si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|2\alpha|)^n\frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

che ‘e una serie convergente. Allora, per il criterio asintotico del confronto, anche la serie data converge per $|\alpha| < 1/2$ e diverge per $1/2 < |\alpha| < 1$, essendo a termini non negativi.

Se $|\alpha| = 1$ la serie diviene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\ln 2\,,$$

che è una serie a termine generale positivo e non infinitesimo. Di conseguenza, diverge a $+\infty$. Infine, se $|\alpha| > 1$, la serie diviene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\ln(1+|\alpha|^n)\,.$$

ha termine generale non infinitesimo e quindi risulta essere divergente (a $+\infty$).

Soluzione del test

Test 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	D	A	A	E	A	B	D

Test 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	E	B	C	D	C	A	C	D

Test 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	E	C	A	D	A	D	B	A

Test 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	D	B	D	C	C	C	E