Analisi Matematica 1 per IM - 11/02/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right) + \frac{x^2-1}{x-2}\,.$$

1. Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

   Sugg: per lo studio del segno può essere utile sapere che $\arctan t \geq -t$ se e solo se $t \geq 0$.

2. Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \to 1$ della funzione

$$\varphi(x) = f(x) + e^{-1/|x-1|}\,.$$

Soluzione

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

   Segno: $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{x^2-1}{x-2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{o} \quad x > 2\,.$$

   In particolare, $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$.

   Ricerca di asintoti: si ha

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^2-1}{x-2} = \pm\infty\,,$$

   da cui si deduce

$$\lim_{x\to 2^\pm} = \pm\infty\,,$$

   e quindi la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = \pm\infty\,, \tag{1}$$

   si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,.$$

La funzione non ha asintoti orizzontali, quindi ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Tenendo conto di (1), si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)+\frac{x^2-1}{x(x-2)}\right]=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)+\frac{2x-1}{x-2}\right]=\frac{\pi}{2}+2\,,$$

e, analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)+\frac{x^2-1}{x(x-2)}\right]=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)+\frac{2x-1}{x-2}\right]=-\frac{\pi}{2}+2\,.$$

Allora la retta di equazione $y=x+2+\pi/2$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta di equazione $y=x+2-\pi/2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Derivata prima: f è derivabile in tutto il suo domunio perché composizione e somma di funzioni derivabili. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{1+(x^2-1)^2/(x-2)^2}+1\right]\frac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2} \\ &= \left[\frac{1}{1+(x^2-1)^2/(x-2)^2}+1\right]\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\,, \end{aligned}$$

da cui si ottiene che $f'(x)\geq 0$ se e solo se

$$x^2-4x+1\geq 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\leq 2-\sqrt{3}\quad \text{o}\quad x\geq 2+\sqrt{3}\,.$$

Allora

- f è crescente in $]-\infty,2-\sqrt{3}]$ e in $[2+\sqrt{3},+\infty[$;
- f è decrescente in $[2-\sqrt{3},2[$ e in $]2,2+\sqrt{3}]$;
- f ha un punto di massimo relativo in $x=2-\sqrt{3}$;
- f ha un punto di minimo relativo in $x=2+\sqrt{3}$.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1

2. Poiché

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}=0\,,$$

vale

$$\arctan\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)=\frac{x^2-1}{x-2}+o\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)\quad \text{per } x\to 1\,,$$

da cui si ottiene

$$f(x)=2\frac{x^2-1}{x-2}+o\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)\quad \text{per } x\to 1\,,$$

e quindi, per il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}=-2\,.$$

Essendo inoltre,

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{-1/|x-1|}}{x-1}=0\,,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)}{x-1}=-2\,,$$

e quindi φ ha ordine di infinitesimo 1 per $x\to 1$.

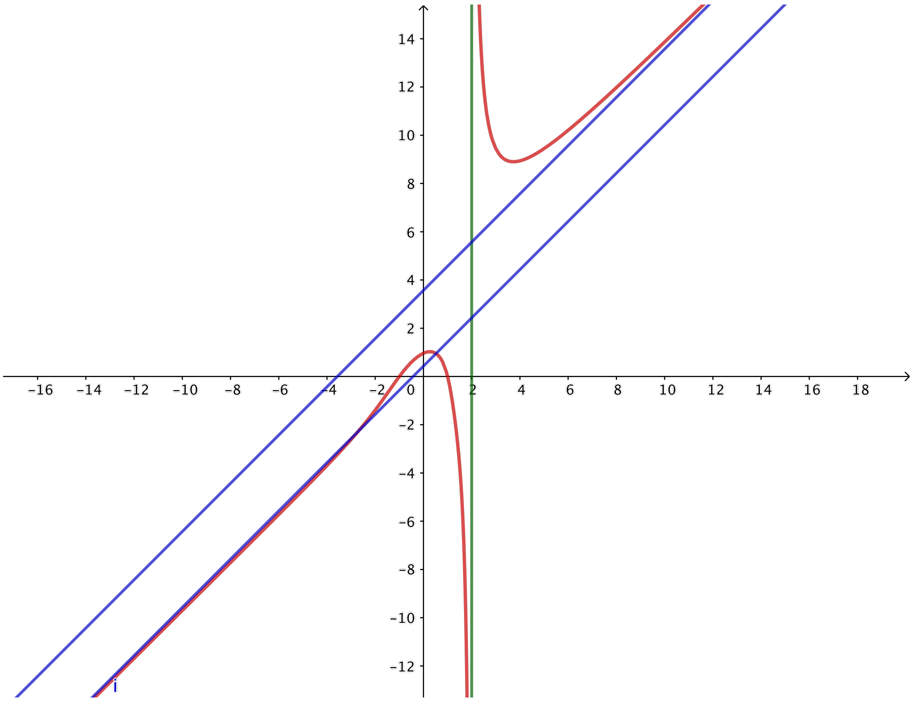

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 (in rosso il grafico, negli altri colori gli asintoti)

Esercizio 2

1. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} x)^2 + \cosh x - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)}\, dx\,.$$
Sugg.: ricordare che $\cosh t = 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$.

2. Trovare tutti e soli gli $\alpha \in]0, +\infty[$ per i quali converge l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} x)^{2\alpha} + \cosh x^\alpha - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)}\, dx\,.$$

Soluzione

1. Poiché per $x \to 0$
$$(\operatorname{sen} x)^2 = x^2 + o(x^2)\,, \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,,$$
per $x \to 0$ si ha
$$(\operatorname{sen} x)^2 + \cosh x - 1 = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$
Allora
$$\frac{(\operatorname{sen} x)^2 + \cosh x - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)} \sim \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{x^{5/2}\ln(x/2)} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^{1/2}\ln(x/2)} \qquad \text{per } x \to 0\,,$$
e quindi l'integrale dato converge per il criterio asintotico del confronto, essendo $1/2 < 1$ e la funzione integranda negativa.

2. Essendo $\alpha > 0$, per $x \to 0$ valgono
$$(\operatorname{sen} x)^{2\alpha} = x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})\,, \qquad \cosh x^\alpha = 1 + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})\,,$$

e quindi per $x \to 0$ si ha

$$(\operatorname{sen} x)^{2\alpha} + \cosh x^\alpha - 1 = \frac{3}{2}\, x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) .$$

Allora

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^{2\alpha} + \cosh x^\alpha - 1}{x^{5/2}\ln(x/2)} \sim \frac{3}{2}\,\frac{x^{2\alpha}}{x^{5/2}\ln(x/2)} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^{5/2-2\alpha}\ln(x/2)} \qquad \text{per } x \to 0 ,$$

e quindi, per il criterio asintotico del confronto ed essendo la funzione integranda negativa, l'integrale dato converge se e solo se $5/2 - 2\alpha < 1$, cioè se e solo se $\alpha > 3/4$.

Esercizio 3

1. Utilizzando la sostituzione $x = \sqrt{t}$, calcolare

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t}\, dt .$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t} \\ y(\pi^2) = 1 . \end{cases}$$

Soluzione

1. Con la sostituzione proposta e integrando per parti due volte, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t}\, dt &= 2\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx = 2\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos x\, dx\right] \\ &= 2\pi^2 + 4\left[x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\, dx\right] = 2\pi^2 + 4\cos x\Big|_0^{\pi} = 2\pi^2 - 8 .\end{aligned}$$

2. Sfruttando il lavoro fatto prima, si ottiene

$$\int \sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t}\, dt = \big[-x^2\cos x + 4x\operatorname{sen} x + 4\cos x + c\big]_{x=\sqrt{t}} = -t\cos\sqrt{t} + 4\sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t} + 4\cos\sqrt{t} + c .$$

Procedendo per separazione di variabili e tenendo conto che

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = -\frac{1}{y} + c ,$$

si ottiene che deve valere

$$-\frac{1}{y(t)} = -t\cos\sqrt{t} + 4\sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t} + 4\cos\sqrt{t} + c .$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(\pi^2) = 1$, si ricava

$$-1 = \pi^2 - 4 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 3 - \pi^2 .$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -\frac{1}{-t\cos\sqrt{t} + 4\sqrt{t}\operatorname{sen}\sqrt{t} + 4\cos\sqrt{t} + 3 - \pi^2} .$$

Soluzione del test

Test 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	E	B	C	D	C	B	B

Test 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	C	D	E	D	C	B

Test 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	D	A	B	C	D	E	B

Test 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B	C	E	C	D	D	A	D