Analisi Matematica 1 per IM - 15/07/2019

Cognome e Nome: .... **Matricola:** ....

Docente: ....

Tempo a disposizione: due ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (x^2 - 5|x| + 6)\ln(x^2 - 5|x| + 6) - (x^2 - 5|x| + 6)\,.$$

1. Studiare la funzione f, determinando dominio, simmetrie, segno, continuità, limiti ed eventuali asintoti, derivabilità e studio di eventuali punti di non derivabilità, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Disegnare il grafico di f. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

2. Determinare, se esiste, l'ordine di infinito per $x \to +\infty$ della funzione
$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\ln x}\,.$$

Soluzione

1. *Dominio:* Deve essere $x^2 - 5|x| + 6 > 0$, e quindi $|x| < 2$ oppure $|x| > 3$. Allora
$$\operatorname{dom} f =]-\infty, -3[\cup]-2, 2[\cup]3, +\infty[\,.$$

   Simmetrie: banalmente $f(-x) = f(x)$, e quindi la funzione è pari. Ci limiteremo a studiarla nell'intervallo $[0, +\infty[$, deducendo per simmetria le informazioni nella semiretta $]-\infty, 0[$. Quindi, **da adesso supporremo $\mathbf{x \geq 0}$**.

   Segno: $f(x) \geq 0$ se e solo se
$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq 1 \iff x^2 - 5x + 6 \geq e \iff$$
$$\iff 0 \leq x \leq \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\,,$$
   avendo osservato che
$$0 < \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} < 2\,, \qquad \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2} > 3\,.$$
   Per simmetria, per $x < 0$ si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se
$$x \leq -\frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \leq x < 0\,.$$
   In particolare, $f(x) = 0$ se e solo se
$$x = \pm\frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \quad \text{o} \quad x = \pm\frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}\,.$$

Ricerca di asintoti: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 5|x| + 6)\big[\ln(x^2 - 5|x| + 6) - 1\big] = +\infty\,,$$

da cui si deduce anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,.$$

e quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x}\big[\ln(x^2 - 5x + 6) - 1\big] = +\infty\,, \tag{1}$$

non ha neanche asintoti obliqui. La funzione è continua nel suo dominio, quindi per ricercare eventuali asintoti verticali studiamo il suo comportamento al limite in 2 e 3. Posto $t = x^2-5x+6$, si ottiene

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{t\to0^+} t(\ln t - 1) = 0\,, \qquad \lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{t\to0^+} t(\ln t - 1) = 0\,,$$

e, per simmetria, risultati analoghi si trovano per i limiti per $x \to -2^+$ e $x \to -3^-$. La funzione può essere prolungata per continuità in ±2 e ±3 ponendo $f(\pm2) = f(\pm3) = 0$. Da adesso in poi considereremo questo prolungamento. In particolare, f non presenta asintoti verticali.

Derivata prima: a priori, f è derivabile in $\operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = (2x-5)\ln(x^2-5x+6) + (x^2-5x+6)\frac{2x-5}{x^2-6x+6)} - (2x-5) = (2x-5)\ln(x^2-5x+6)\,.$$

In particolare, per il teorema del limite della derivata, si ha

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = -5\ln 6\,,$$

e, per simmetria, $f'_-(0) = 5\ln 6$, da cui si conclude che $x = 0$ è punto angoloso. Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to2^-} f'(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to3^+} f'(x) = -\infty\,,$$

f non è derivabile in 2 e in 3 e,persimmentria, neanche in -2 e -3. Studiamo ora il segno di f'. Poiché

$$2x - 5 \geq 0 \quad\iff\quad x \geq \frac{5}{2}$$

$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq 0 \quad\iff\quad x^2 - 5x + 6 \geq 1 \quad\iff\quad 0 < x \leq \frac{5-\sqrt5}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{5+\sqrt5}{2}\,,$$

e osservato che

$$2 < \frac{5}{2} < 3\,, \qquad \frac{5-\sqrt5}{2} < 2 \qquad \frac{5+\sqrt5}{2} > 3\,,$$

sfruttando la simmetria si ottiene che

- f è crescente negli intervalli

$$\left[-\frac{5+\sqrt5}{2}, -3\right], \qquad \left[-\frac{5-\sqrt5}{2}, 0\right], \qquad \left[\frac{5-\sqrt5}{2}, 2\right], \qquad \left[\frac{5+\sqrt5}{2}, +\infty\right[\,;$$

- f è decrescente negli intervalli

$$\left]-\infty, -\frac{5+\sqrt5}{2}\right], \qquad \left[-2, -\frac{5-\sqrt5}{2}\right], \qquad \left[0, \frac{5-\sqrt5}{2}\right], \qquad \left[3, \frac{5+\sqrt5}{2}\right]\,;$$

- f ha un punti di massimo relativo in $x = \pm2$, $x = \pm3$ e $x = 0$;

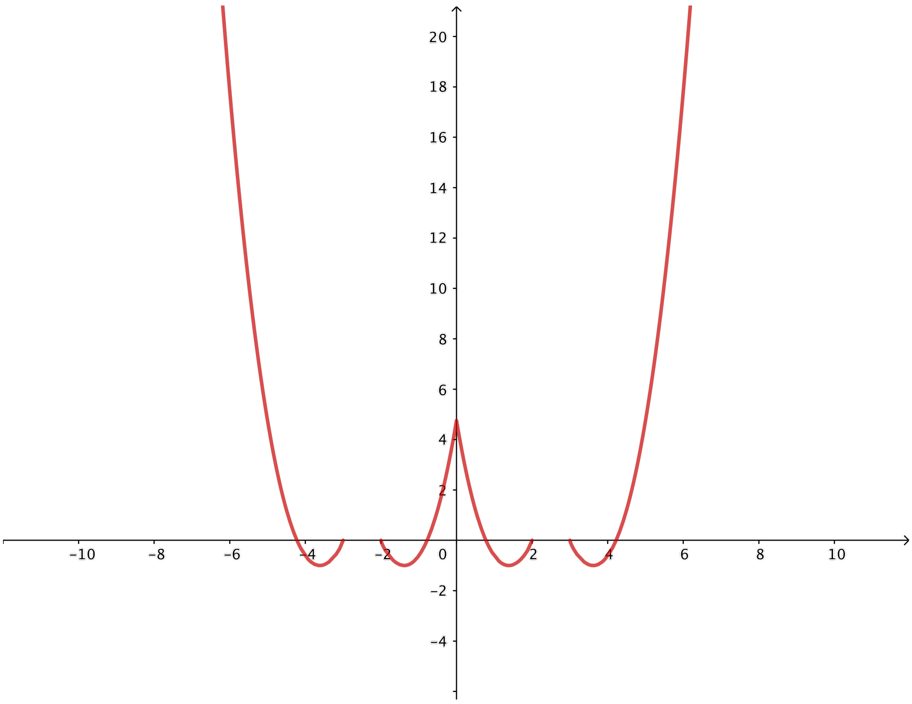

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 (gli assi hanno scale diverse)

- f ha un punti di minimo relativo

$$x = \pm\frac{5-\sqrt{5}}{2}\,, \qquad x = \pm\frac{5+\sqrt{5}}{2}\,.$$

  Si verifica facilmente che tali punti sono anche di minimo assoluto

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1

2. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2} = 1\,,$$

vale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2}\cdot\frac{\ln(x^2-5x+6)-1}{\ln x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln(1-5/x+6/x^2)-1}{\ln x} = 2\,,$$

e quindi l'ordine di infinito della funzione è 2.

Esercizio 2

1. Calcolare

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^x-1-x\ln(1+x)}{x^3\tan x}\,.$$

Sugg.: si sviluppi e^y con $y = x\ln(1+x)$...

2. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x^\alpha)^x-1}{x^3\tan x}\,.$$

Soluzione

1. Si ha

$$(1+x)^x = e^{\ln(1+x)^x} = e^{x\ln(1+x)}\,,$$

e poiché

$$\lim_{x\to 0} x\ln(1+x) = 0\,,$$

si ottiene che vale

$$(1+x)^x = 1 + x\ln(1+x) + \frac{1}{2}\big[x\ln(1+x)\big]^2 + o\Big(\big[x\ln(1+x)\big]^2\Big) \quad \text{per } x\to 0\,.$$

Allora, essendo anche $\tan x = x + o(x)$ per $x \to 0$, con il principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^x - 1 - x\ln(1+x)}{x^3\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big[x\ln(1+x)\big]^2}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^2 = \frac{1}{2}\,.$$

2. Essendo $\alpha > 0$, procedendo in modo analogo a prima si ottiene

$$(1+x^\alpha)^x = e^{x\ln(1+x^\alpha)} = 1 + x\ln(1+x^\alpha) + o\big(x\ln(1+x^\alpha)\big) \quad \text{per } x\to 0\,,$$

e quindi, grazie al principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x^\alpha)^x - 1}{x^3\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+x^\alpha)}{x^4}\,.$$

Poiché $\ln(1+x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x\to 0^+$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x^\alpha)^x - 1}{x^3\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^3} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<3\,, \\ 1 & \text{se } \alpha = 3\,, \\ 0 & \text{se } \alpha > 3\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2 - x}\,dx\,.$$

2. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2-x}\,y = \dfrac{x}{x-1} \\ y(2) = 1\,. \end{cases}$$

Soluzione

1. Si ha

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln|x-1| - \ln|x| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c\,.$$

2. Sfruttando il lavoro fatto prima, moltiplicando ambo i membri dell'equazione per

$$e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

e tenendo conto che

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x} \qquad \text{per } x > 1,$$

si ottiene che vale

$$\frac{x-1}{x}\, y' + \frac{1}{x^2} = 1\,,$$

da cui

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x}\, y(x)\right) = 1\,,$$

e quindi

$$\frac{x-1}{x}\, y(x) = x + c\,.$$

Sfruttando la condizione iniziale $y(2) = 1$ si ottiene $c = -3/2$, per cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x}{x-1}\left(x - \frac{3}{2}\right)\,.$$

Soluzione del test

Test 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	A	A	C	B	D	E	B

Test 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	E	A	B	C	D	C	B	E

Test 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	C	E	E	D	D	B	D	B

Test 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	D	B	A	E	C