

Programma del corso di Analisi Matematica 1
Laurea in Ingegneria Meccanica - matricole dispari
Anno Accademico 2018/2019

Docenti: A. Marson e P. Musolino

Legenda: dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

Elementi introduttivi

Elementi di logica. Proposizioni, connettivi logici, quantificatori, uso della negazione con altri connettivi e/o quantificatori. Leggi di De Morgan. Principio di induzione.

Elementi di teoria degli insiemi. Unione, intersezione, differenza, differenza simmetrica, complementazione e prodotto cartesiano. Leggi di De Morgan. Relazioni d'ordine.

Numeri razionali. Proprietà di densità (D), numerabilità, rappresentazione decimale. Irrazionalità di $\sqrt{2}$ (D).

Numeri reali. Definizione. Teorema di completezza. Intervalli. I simboli $-\infty$ e $+\infty$ e la retta reale estesa. Modulo o valore assoluto. Disuguaglianza triangolare (D). Insiemi limitati, superiormente ed inferiormente limitati. Maggioranti, minoranti, massimo e minimo di un insieme. Estremo superiore, estremo inferiore e loro caratterizzazione (D). Proprietà di Archimede. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} (D). Radicali e potenze ad esponente reale. Logaritmi.

Funzioni.

Definizione di funzione. Grafico di una funzione. Immagine e controimmagine di un insieme. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive. Restrizione di una funzione. Funzione inversa. Funzioni simmetriche. Funzioni monotone. Funzioni periodiche. Funzioni trigonometriche e loro inverse. Funzioni iperboliche e loro inverse (calcolo esplicito).

Limiti di funzioni di una variabile reale

Topologia della retta reale. Intorni sferici. Intersezione di intorni è un intorno. Proprietà di separazione degli intorni (D). Punto di accumulazione e punto isolato.

Limiti e loro calcolo. Definizione di limite. Teorema di unicità del limite (D). Locale limitatezza delle funzioni con limite finito in un punto (D). Limiti destro e sinistro. Esistenza dei limiti destro e sinistro ed esistenza del limite. Caratterizzazione del limite di una funzione tramite il valore assoluto (D). Limite di $|f|$ noto quello di f (D). Teorema della permanenza del segno e corollario (D). Teorema del confronto (D). Teorema dei due carabinieri (D). Il limite fondamentale di $(\sin x)/x$ per $x \rightarrow 0$ (D). Limiti al finito delle funzioni seno e potenza (D). Limiti di funzioni monotone. Teorema del cambio di variabile. Limiti della somma (D), del prodotto e del quoziente di due funzioni. Limiti fondamentali derivanti da quello di $(\sin x)/x$ per $x \rightarrow 0$ (D). Numero di Nepero, il limite di $(1 + 1/x)^x$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e limiti fondamentali conseguenti (D). Forme indeterminate. Il simbolo “ o ” piccolo e la sua algebra. Sviluppo asintotico di una funzione composta. Principio di sostituzione degli infinitesimi (D). Confronto fra infiniti e infinitesimi. Ordine di infinito e infinitesimo. Gerarchia degli infiniti.

Successioni e serie numeriche

Successioni. Definizione di limite per una successione. Successioni convergenti, divergenti, indeterminate. Gerarchia degli infiniti. Limitatezza delle successioni convergenti (D). Teoremi della permanenza del segno, del confronto e dei due carabinieri. Caratterizzazione del limite di successioni monotone (D). Progressione geometrica. Successioni e criterio di Cauchy. Sottosuccessioni. Caratterizzazione dell’esistenza del limite di una successione con le sue sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Caratterizzazione del limite di funzioni con le successioni.

Serie. Somma parziale. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Carattere e somma di una serie geometrica (D). Serie telescopiche. Carattere della somma di serie convergenti (D) e del prodotto di una serie per una costante. Resto parziale n -esimo. Limite del termine generale di una serie convergente (D). Criterio di Cauchy per le serie (D). Carattere di una serie a termini definitivamente non negativi (D). Convergenza assoluta e sua relazione con la convergenza semplice (D). Criterio del confronto (D). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica e della serie armonica generalizzata (D). Criterio asintotico del confronto (D). Criteri del rapporto (D) e della radice (D), loro versioni asintotiche. Serie a segni alterni: Criterio di Leibniz.

Funzioni continue di una variabile reale

Definizione di funzione continua. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni continue. Continuità della composizione di funzioni

continue (D). Discontinuità di prima e seconda specie. Discontinuità eliminabile e prolungamento per continuità. Teorema di Weierstrass (D). Teorema di Bolzano o degli zeri (D). Teorema dei valori intermedi (D). Continuità dell'inversa di una funzione continua.

Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale

Definizioni e prime proprietà. Definizione di derivata e di retta tangente. Continuità di una funzione derivabile (D). Derivate destra e sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra (D). Derivata della somma (D), del prodotto (D) e del quoziente di funzioni derivabili. Derivata della funzione inversa di una funzione derivabile. Derivata della composizione di funzioni. Funzione derivata e teorema del limite della derivata. Derivate successive. Funzioni di classe \mathcal{C}^n e di classe \mathcal{C}^∞ .

Proprietà delle funzioni derivabili. Teorema di De L'Hôpital. Teorema di Fermat (D). Teorema di Rolle (D). Teorema di Lagrange (D). Teorema di Cauchy. Costanza delle funzioni con derivata nulla (D). Legame tra monotonia e derivata prima (D). Stime tra funzioni usando le derivate. Funzioni convesse e concave. Monotonia della derivata prima in una funzione convessa (D). Legame tra convessità e segno della derivata seconda (D). Punti di flesso. Legame tra punti di flesso e zeri della derivata seconda (D nel caso di funzioni derivabili due volte in un intervallo). Studio della natura dei punti critici con la derivata seconda. Polinomio di Taylor e di MacLaurin. Formula di Taylor con il resto di Peano (D fino all'ordine 2). Sviluppi in serie di exp, sin, cos, sinh, cosh, ln, arctan.

Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale

Integrale di Cauchy-Riemann. Partizioni e partizioni puntate di un intervallo. Ampiezza di una partizione. Somme di Cauchy. Definizione di funzione integrabile e di integrale. Integrale come limite delle somme di Cauchy relative ad una successione di partizioni puntate con ampiezza infinitesima. Integrale come area del sottografico.

Classi di funzioni integrabili. Condizione intrinseca di integrabilità di una funzione. Non integrabilità della funzione di Dirichlet (D). Integrabilità delle funzioni monotone e continue a tratti.

Proprietà degli integrali. Linearità dell'integrale. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Integrabilità del modulo di una funzione integrabile. Teorema della media (D).

Calcolo di integrali. Il concetto di primitiva di una funzione. Legame tra primitive di una stessa funzione su un intervallo (D). Teorema fondamentale del calcolo (D). Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo, seconda versione (D). Metodi di integrazione: integrali immediati o ad essi riconducibili, integrazione per parti, integrazione per sostituzione. Integrali di funzioni razionali fratte o ad essi riconducibili.

Integrali generalizzati. Definizione di integrabilità in senso improprio e di integrale generalizzato o improprio. Assoluta integrabilità. Integrabilità in senso improprio delle funzioni assolutamente integrabili. Criterio del confronto (D). Criterio asintotico del confronto. Criterio integrale per le serie.

Metodi risolutivi per equazioni differenziali

Equazioni lineari del primo ordine: integrale generale; metodo di risoluzione di un problema di Cauchy. Equazioni a variabili separabili: metodo di risoluzione di un problema di Cauchy.