Complementi di analisi complessa

Integrali di Fresnel

Proviamo che

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \cos t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} t^2\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \operatorname{sen} t^2\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Lo facciamo integrando $f(z) = e^{-z^2}$ sul circuito γ in figura 1 e sfruttando il fatto che

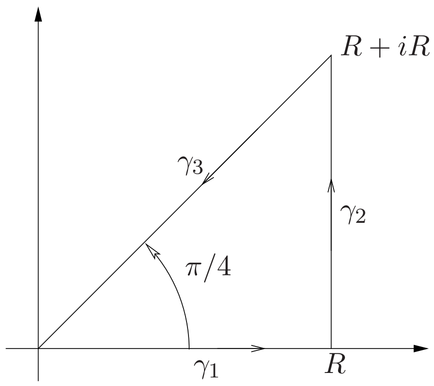

Figura 1: Circuito per calcolare gli integrali di Fresnel

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Il circuito è la concatenazione di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ con

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = R + it\,, \qquad \gamma_3^-(t) = t + it\,,$$

dove $t \in [0, R]$. Essendo $z \mapsto e^{-z^2}$ una funzione intera, usando il teorema integrale di Cauchy si ottiene

$$0 = \int_\gamma e^{-z^2}\,dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz - \int_{\gamma_3^-} e^{-z^2}\,dz\,,$$

e quindi

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,d = \int_{\gamma_3^-} e^{-z^2}\,dz - \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\,.$$

Calcolando esplicitamente gli integrali si ottiene

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz = i\int_0^R e^{-(R+it)^2}\,dt = ie^{-R^2}\int_0^R e^{-2iRt}e^{t^2}\,dt$$

$$\int_{\gamma_3^-} e^{-z^2}\,dz = (1+i)\int_0^R e^{-(t+it)^2}\,dt = (1+i)\int_0^R e^{-2it^2}\,dt \overset{s=\sqrt{2}t}{=} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-is^2}\,ds$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}R} \big(\cos s^2 - i\,\mathrm{sen}\, s^2\big)\,ds$$

Si osservi

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\right| = e^{-R^2}\left|\int_0^R e^{-2iRt}e^{t^2}\,dt\right| \le e^{-R^2}\int_0^R \left|e^{-2iRt}e^{t^2}\right|dt = e^{-R^2}\int_0^R e^{t^2}\,dt\,,$$

ed essendo

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R^2}\int_0^R e^{t^2}\,dt = \lim_{R\to+\infty}\frac{\int_0^R e^{t^2}\,dt}{e^{R^2}} \overset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2R} = 0$$

si ottiene che

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz = 0\,.$$

Allora

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\sqrt{2}R}\big(\cos s^2 - i\,\mathrm{sen}\, s^2\big)\,ds\,ds = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3^-} e^{-z^2}\,dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty}\cos s^2\,ds - i\int_0^{+\infty}\mathrm{sen}\, s^2\,ds = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

da cui

$$\int_0^{+\infty}\cos s^2\,ds = \int_0^{+\infty}\mathrm{sen}\, s^2\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,,$$

come si voleva.

Serie di potenze

Data una successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi, diciamo serie di potenze associata a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e centro z_0 la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\,, \tag{1}$$

dove $z_0\in\mathbb{C}$ è fissato. È evidente che studiare l'insieme dei numeri complessi z per cui (1) converge equivale a studiare l'insieme dei numeri complessi z per cui converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\,. \tag{2}$$

Infatti, (1) converge per $z = \omega$ se e solo se (2) converge per $z = \omega - z_0$. Il lemma che segue ci aiuta a capire come è fatto l'insieme dove (2) (e quindi (1)) converge.

Lemma 1 (di Abel) *Siano $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi e $\omega \in \mathbb{C}$ tale che $\{c_n\omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata. Allora la serie di potenze* (2) *associata alla successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge assolutamente per $|z| < |\omega|$.*

Dim. Sia $M > 0$ tale che $|c_n\omega^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |\omega|$, si osservi che

$$|c_n z^n| = |c_n\omega^n| \left|\frac{z}{\omega}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{\omega}\right|^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché la serie di termine generale $|z/\omega|^n$ converge essendo una serie geometrica di ragione $|z/\omega| < 1$, per il criterio del confronto anche la serie di termine generale $|c_n z^n|$ converge, come si voleva. □

Il lemma 1 appena dimostrato dice in pratica che se (2) converge per qualche ω (e quindi la serie (2) con $z = \omega$ ha termine generale $c_n\omega^n$ infinitesimo), allora converge assolutamente per tutti i numeri complessi nella palla di centro $z = 0$ e raggio $|\omega|$. Questo ci permette di definire il *raggio di convergenza* di (2) come

$$R = \sup\left\{|z| : \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}. \tag{3}$$

Se $R > 0$ e $|z| < R$ allora la serie (2) converge assolutamente, perché, grazie alle proprietà dell'estremo superiore, esiste $\omega \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\omega| < R$ per cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\omega^n$$

converge, e quindi $\{c_n\omega^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, da cui la conclusione grazie al lemma di Abel. Allora, una volta calcolato il raggio di convergenza R, la serie di potenze (2) converge (assolutamente) in $B_R(0)$, non converge per $|z| > R$, mentre nulla si può dire se $|z| = R$. Studiando la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|c_n z^n\right|$$

con il criterio della radice o del rapporto, è facile vedere che se esiste uno dei due limiti

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,, \qquad L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\,,$$

allora il raggio di convergenza della serie di potenze associata a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{se} \quad L \in \mathbb{R},\, L \neq 0\,, \\ +\infty & \text{se} \quad L = 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad L = +\infty\,. \end{cases}$$

Esempio 1 Calcoliamo il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n - 1}{n4^n} z^n\,.$$

Si ottiene

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1}(2^{n+1}-1)/[(n+1)4^{n+1}]\right|}{\left|(-1)^n(2^n-1)/(n4^n)\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi il raggio di convergenza è $R = 1/L = 2$.

Conseguenze del teorema di analiticità delle funzioni olomorfe

Diamo la seguente

Definizione 1 *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto. $f : A \to \mathbb{C}$ si dice analitica in A se per ogni $z_0 \in A$ e per ogni $B_r(z_0) \subseteq A$ si ha*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \forall\, z \in B_r(z_0)\,.$$

In pratica, f è analitica se per ogni $z_0 \in A$ f è sviluppabile in serie di potenze in ogni intorno di z_0 contenuto in A. In particolare, la serie di Taylor di f di centro z_0 converge in ogni palla di centro z_0 contenuta in A. Il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe afferma che una funzione olomorfa in un aperto A è necessariamente analitica. Poiché le funzioni analitiche sono olomorfe, questo implica che le funzioni analitiche in un aperto A sono tutte e sole le funzioni olomorfe in A. Il teorema che segue, che è conseguenza di questo fatto, caratterizza le funzioni intere (cioè olomorfe su tutto $\mathbb{C}$) e limitate.

Teorema 1 (di Liouville) *Sia $f \in H(\mathbb{C})$ limitata. Allora f è costante.*

Dim. Sia $|f(z)| \le M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Poiché f è intera vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_n \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \qquad \forall\, R > 0\,, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Osservato che

$$\left|\int_{C_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right| \le \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = 2\pi \frac{M}{R^n} \to 0 \quad \text{per } R \to +\infty\,, n \ge 1\,,$$

si ottiene $c_n = 0$ per ogni $n \ge 1$, da cui la conclusione che $f(z) = f(0)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. □

In pratica il teorema di Liouville afferma che non esistono funzioni intere limitate non banali. Usando il teorema di Liouville si dimostra il

Corollario 1 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio a coefficienti complessi non costante ha almeno uno zero in $\mathbb{C}$.*

Dim. Sia $p = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinomio a coefficienti a_i complessi non costante. Se fosse privo di zeri, $1/p$ sarebbe una funzione intera e limitata perché

$$p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \right) \to \infty \quad \text{per } z \to \infty \,,$$

e quindi $1/p(z) \to 0$ per $z \to \infty$. Per il teorema di Liouville $1/p$ (e quindi p) sarebbe costante, contro l'ipotesi. $\square$

Singolarità isolate

La proposizione che segue permette di classificare le singolarità isolate di una funzione senza dover passare attraverso il suo sviluppo di Laurent.

Proposizione 1 *Sia z_0 singolarità isolata per f.*

1. *z_0 è singolarità eliminabile se e solo e il $\lim_{z \to z_0} f(z)$ esiste finito.*
2. *z_0 è polo di ordine $m \geq 1$ se e solo se $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ esiste finito e non nullo. In particolare, z_0 è polo se e solo se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*
3. *z_0 è singolarità essenziale se e solo se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ non esiste.*

Dim.

1. Sia z_0 singolarità eliminabile. Allora in un intorno $B_r(z_0)$ di z_0 f coincide con una funzione $\varphi \in H(B_r(z_0))$ perché la sua serie di Laurent di centro z_0 non contiene termini con potenze negative di $z - z_0$. Allora
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) \,,$$
da cui la conclusione. Viceversa, supponiamo che f abbia limite finito in z_0, cosicché risulta limitata in un intorno di z_0. Allora, $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in B_r(z_0)$ per qualche $r, M > 0$. Se $n \geq 1$ e $0 < \rho < r$, si ha
$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{1-n}} \, ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{s \in \text{sostegno } C_\rho(z_0)} \left| f(s)(s - z_0)^{n-1} \right| L(C_\rho(z_0)) \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \rho^{n-1} \cdot (2\pi\rho) = M\rho^n \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0 \,, \end{aligned}$$
e quindi nello sviluppo di Laurent di f di centro z_0 i coefficienti di Laurent c_{-n} con $n \geq 1$ sono tutti nulli. Si conclude allora che z_0 è singolarità eliminabile.
2. Sia z_0 polo di ordine m. Allora lo sviluppo di Laurent di f si scrive
$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_o)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_o)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z) \,, \tag{4}$$

dove

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$$

è olomorfa in un intorno di z_0 e $c_{-m} \neq 0$. Ne consegue che

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) &= \lim_{z\to z_0} \left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m \varphi(z)\right] \\ &= c_{-m} \neq 0\,,\end{aligned}$$

da cui la conclusione. Supponiamo ora che $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)$ esista finito e non nullo. Allora la funzione $\psi(z) = (z-z_0)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0, grazie al punto 1, e quindi il suo sviluppo di Laurent di centro z_0 non contiene potenze negative di $z - z_0$,

$$\psi(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-z_0)^n\,,$$

dove

$$d_0 = \lim_{z\to z_0} \psi(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0\,.$$

Allora lo sviluppo di Laurent di f di centro z_0 è

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} &= \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-z_0)^{n-m} \\ &= \frac{d_0}{(z-z_0)^m} + \frac{d_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{d_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} d_{m+k}(z-z_0)^k\,,\end{aligned}$$

e quindi z_0 è polo di ordine m, come si voleva. Il fatto che z_0 sia polo per f se e solo se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si deduce immediatamente riscrivendo $f(z) = \psi(z)/(z-z_0)^m$ e sfruttando il fatto che $\psi(z_0) \neq 0$.

3. Una volta osservato che z_0 è singolarità essenziale se e solo se non è eliminabile né polo, la conclusione segue dai punti 1 e 2.

□

Residui

Ricordiamo la definizione di residuo di una funzione di variabile complessa in una sua singolarità.

Definizione 2 (di residuo) *Sia z_0 singolarità isolata per la funzione di variabile complessa f. Si dice residuo di f in z_0, $\mathrm{res}(f, z_0)$, il coefficiente di $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent di f di centro z_0, cioè*

$$\mathrm{res}(f, z_0) = c_{-1} = \oint_\gamma f(s)\,ds\,,$$

dove γ è un qualsiasi circuito (curva chiusa semplice) regolare a tratti contenente z_0 al suo interno.

Esempio 2 Calcoliamo

$$\operatorname{res}\left(\frac{z^2}{(z-i)^2}, i\right).$$

Poiché

$$z^2 = (z-i+i)^2 = -1 + 2i(z-i) + (z-i)^2, ,$$

lo sviluppo di Laurent di $z \mapsto z^2/(z-i)^2$ di centro $z_0 = i$ si scrive

$$\frac{z^2}{(z-i)^2} = \frac{-1+2i(z-i)+(z-i)^2}{(z-i)^2} = -\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{2i}{z-i} + 1\,,$$

e quindi il residuo cercato vale $2i$. Si noti che in questo caso lo sviluppo di Laurent è costituito da un numero finito di termini. In particolare, la parte regolare dello sviluppo (quella costituita dalle potenze non negative di $z-i$) è 1, mentre la parte singolare (costituita dalle potenze negative di $z-i$) è $1-/(z-i)^2 + 2i/(z-i)$.

Esempio 3 Calcoliamo

$$\operatorname{res}(\operatorname{senh}(1/z), 0)\,.$$

La funzione $z \mapsto \operatorname{senh}(1/z)$ ha una singolarità essenziale in $z_0 = 0$, perché, considerando la sua restrizione all'asse immaginario, si ha

$$\lim_{y\to 0} \operatorname{senh}(1/iy) = \lim_{y\to 0} \big[-i \operatorname{sen}(1/y) \big]$$

e tale limite non esiste. Il suo sviluppo di Laurent si ricava da quello della funzione seno iperbolico e si scrive

$$\operatorname{senh}(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \cdots$$

ed ha quindi solo parte singolare perché compaiono solo potenze negative di z. Il fatto che ci siano infiniti termini con potenze negative di z conferma che $z_0 = 0$ è singolarità essenziale. Poiché il coefficiente di z^{-1} è 1, questo è il valore del residuo cercato.

Osservazione 1 Si osservi che se f ha una singolarità eliminabile in z_0, allora $\operatorname{res}(f, z_0) = 0$. Infatti, lo sviluppo di Laurent di f di centro z_0 non contiene potenze negative. Ad esempio, se consideriamo $f(z) = (\cos z - 1)/z^2$, la singolarità in $z_0 = 0$ è eliminabile perché

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{-z^2/2 + o(z^2)}{z^2} \overset{PdS}{=} -\frac{1}{2}\,.$$

Lo sviluppo di Laurent di f di centro $z_0 = 0$ si deduce da quello di $z \mapsto \cos z$ e si scrive

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k+2)!}\,,$$

e non contiene potenze negative di z.

Il teorema che segue permette di calcolare il residuo di una funzione in un polo senza passare attraverso lo sviluppo di Laurent.

Proposizione 2 *Sia z_0 polo di ordine $m \geq 1$ per f. Allora*

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big[(z-z_0)^m f(z)\big] \,. \tag{5}$$

In particolare, se $f = g/h$ con g e h olomorfe in un intorno di z_0 con $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, si ha

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \,. \tag{6}$$

Dim. Poiché f ha un polo di ordine m in z_0, il suo sviluppo di Laurent di centro z_0 si scrive come in (4)

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_o)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_o)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \varphi(z) \,,$$

con φ funzione olomorfa in un intorno di z_0 e $c_{-m} \neq 0$. Allora

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m \varphi(z) \,,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\big[(z-z_0)^m f(z)\big] &= c_{-m+1} + 2(z-z_0)c_{-m+2} + \cdots + c_{-1}(m-1)(z-z_0)^{m-2} + \\
&\quad + m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m \varphi'(z) \\
\frac{d^2}{dz^2}\big[(z-z_0)^m f(z)\big] &= 2c_{-m+2} + 6c_{-m+3}(z-z_0) + \cdots + \\
&\quad + c_{-1}(m-1)(m-2)(z-z_0)^{m-3} + m(m-1)(z-z_0)^{m-2}\varphi(z) + \\
&\quad + 2m(z-z_0)^{m-1}\varphi'(z) + (z-z_0)^m \varphi''(z) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big[(z-z_0)^m f(z)\big] &= (m-1)!\, c_{-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \frac{d^k}{dz^k}(z-z_0)^m \frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}} \varphi(z) \,,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la formula di Leibniz. Poiché

$$\frac{d^k}{dz^k}(z-z_0)^m \Big|_{z=z_0} = 0 \qquad \forall\, k = 0, \ldots, m-1 \,,$$

si ha

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big[(z-z_0)^m f(z)\big] = (m-1)!\, c_{-1} \,,$$

da cui si deduce (5). La formula (6) è una semplice applicazione di (5) nel caso di poli semplici. □

In soldoni, per calcolare il residuo di una funzione in una sua singolarità isolata si procede in questo modo:

- se la singolarità è eliminabile, il residuo è nullo (osservazione 1);
- se la singolarità è un polo, si usa la proposizione 2;
- se la singolarità è essenziale bisogna necessariamente passare attraverso lo sviluppo di Laurent della funzione centrato nella singolarità.

Esempio 4 Calcoliamo i residui di $f(z) = e^{1/(z-2)}/(3-z)$ nelle sue singolarità. Queste sono $z = 3$, che si verifica facilmente essere un polo del primo ordine, e $z = 2$, che si verifica essere una singolarità essenziale perché, restringendosi all'asse reale,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{1/(x-2)}}{3-x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{1/(x-2)}}{3-x} = +\infty\,,$$

e quindi non esiste il limite di f per $z \to 2$. Il residuo in $z = 3$ si calcola facilmente

$$\operatorname{res}(f,3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = -\lim_{z\to 3} e^{1/(x-2)} = -e\,.$$

Per il residuo nella singolarità essenziale bisogna passare attraverso lo sviluppo di Laurent di centro $z_0 = 2$. Poiché

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{1-(z-2)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(z-2)^k\,,$$

per $|z-2| < 1$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{e^{1/(z-2)}}{3-z} &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{(z-2)^p}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(z-2)^k\right) = \sum_{p,k=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}(z-2)^{k-p} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{k-p=n\\k,p\geq 0}}\frac{1}{p!}\right)(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\operatorname{res}(f,2) = c_{-1} = \sum_{\substack{k-p=-1\\k,p\geq 0}}\frac{1}{p!} = \sum_{\substack{p=k+1\\k,p\geq 0}}\frac{1}{p!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!} = e-1\,.$$

Esempio 5 Calcoliamo

$$\operatorname{res}\left(\frac{(e^{iz}-1)^2}{(1-\cos z)^2}, 0\right)\,.$$

Osserviamo che $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine. Infatti, poiché

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\,, \qquad 1-\cos z = \frac{z^2}{2} + o(z^3)\,, \tag{7}$$

si ha

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z(e^{iz}-1)}{1-\cos z}\right]^2 = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z(iz+o(z))}{z^2/2+o(z^2)}\right]^2 \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{z\to 0}\left[\frac{iz^2}{z^2/2}\right]^2 = -4\,.$$

Per calcolare il residuo usiamo (5):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\Big[z^2\frac{(e^{iz}-1)^2}{(1-\cos z)^2}\Big] &= 2\frac{z(e^{iz}-1)}{1-\cos z}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z(e^{iz}-1)}{1-\cos z}\Big]\\ &= 2\frac{z(e^{iz}-1)}{1-\cos z}\cdot\frac{(e^{iz}-1+ize^{iz})(1-\cos z)-z\operatorname{sen} z(e^{iz}-1)}{(1-\cos z)^2}\,.\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{sen} z = z + o(z^2)$ e sfruttando (7) si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\Big(\frac{(e^{iz}-1)^2}{(1-\cos z)^2},0\Big) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\big[z^2 f(z)\big] = \lim_{z\to 0} 2\frac{iz^2+o(z^2)}{z^2/2+o(z^2)}\cdot\\ &\cdot\frac{\big[2iz-3z^2/2+o(z^2)\big]\big[z^2/2+o(z^3)\big]-z(z+o(z^2))\big(iz-z^2/2+o(z^2)\big)}{z^4/4+o(z^4)}\\ &\overset{\text{PdS}}{=} \lim_{z\to 0} 2\frac{iz^2}{z^2/2}\cdot\frac{-z^4/2}{z^4/4} = -8i\,.\end{aligned}$$

Il teorema dei residui

Diamo la seguente definizione

Definizione 3 (indice di avvolgimento) *Data una curva chiusa γ regolare a tratti ed un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ non appartenente al sostegno di γ, si dice indice (di avvolgimento) di γ attorno a z_0 (o rispetto a z_0) la quantità*

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) \doteq \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz\,. \tag{8}$$

Si dimostra che l'indice di avvolgimento di una curva chiusa attorno ad un punto è sempre un numero intero. Esso rappresenta il numero di volte che la curva gira attorno al punto, contate positivamente se gira in senso antiorario, negativamente se gira in senso orario. È possibile calcolare l'indice di una curva chiusa in modo empirico. Consideriamo la curva γ in figura 2 (in rosso) che consideriamo percorsa una volta nel senso delle frecce nere. Fissato un punto z_0, consideriamo una semiretta uscente da z_0 che non intersechi γ in alcun nodo (in blu in figura), orientata nel verso della freccia blu. Ad ogni intersezione con il sostegno di γ contiamo (in blue in figura)

- $+1$ ogni qual volta il versore della semiretta e quello tangente alla curva formano una base di $\mathbb{R}^2$ con la stessa orientazione della base canonica, cioè si vede il versore della semiretta girare in senso antiorario per sovrapporsi al versore tangente spazzando l'angolo più piccolo;

- -1 ogni qual volta il versore della semiretta e quello tangente alla curva formano una base di $\mathbb{R}^2$ con orientazione opposta a quella della base canonica, cioè si vede il versore della semiretta girare in senso orario per sovrapporsi al versore tangente spazzando l'angolo più piccolo.

La somma dei termini così ottenuti dá l'indice di γ attorno a z_0, e quindi se z_0 e z_1 sono come in figura si ha

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) = 0\,, \qquad \operatorname{ind}(\gamma, z_1) = 1\,.$$

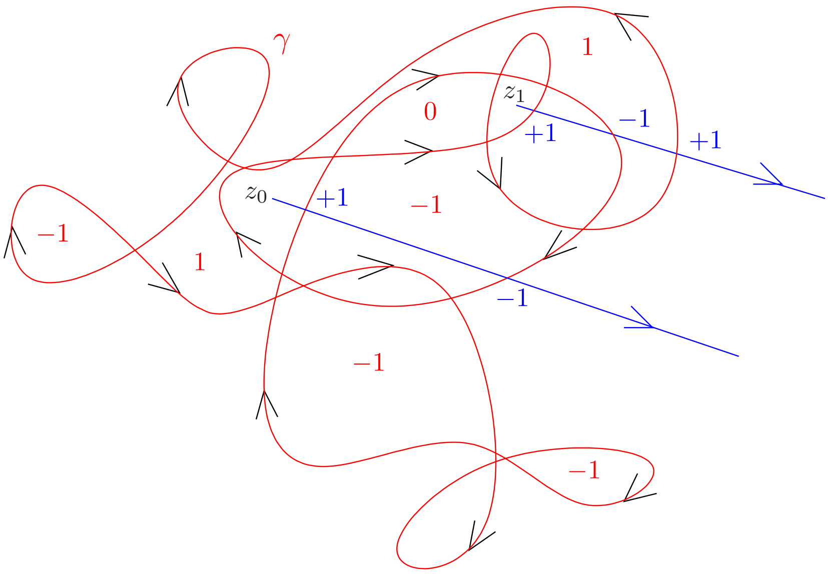

Figura 2: Come calcolare l'indice di una curva in un punto

In figura sono riportati in rosso gli indici di γ in alcune delle regioni del piano che essa borda. Nel caso in cui γ sia percorsa $k \geq 2$ volte, invece di contare $+1$ e -1 come sopra riportato, si conta $+k$ e $-k$.

Adesso abbiamo gli elementi per enunciare il

Teorema 2 (dei residui) *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_1, \ldots, z_n \in A$, $f \in H(A \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Sia γ curva chiusa regolare a tratti con sostegno contenuto in $A \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, omotopa ad un punto in A. Allora*

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k) \operatorname{ind}(\gamma, z_k)\,.$$

Si osservi che nel caso si consideri un circuito (curva chiusa semplice) γ regolare a tratti percorso in senso antiorario, fissato un punto z non appartenente al sostegno di γ si ha

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \text{ appartiene all'interno di } \gamma\,, \\ 0 & \text{se } z \text{ non appartiene all'interno di } \gamma\,. \end{cases}$$

Allora in tal caso il teorema dei residui si scrive

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{res}(f, \omega_k)\,,$$

dove $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sono le singolarità di f che appartengono all'interno di γ. Facciamo un paio di esempi per chiarire.

Esempio 6 Calcoliamo
$$\int_{C_2(i)} \frac{1}{z^4-2z^2-8}\, dz\,,$$
dove $C_2(i)$ è la circonferenza di centro i e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario. Riscriviamo la funzione integranda come
$$f(z) = \frac{1}{z^4-2z^2-8} = \frac{1}{(z^2+2)(z^2-4)}\,.$$
Le sue singolarità sono $z = \pm i\sqrt{2}$ e $z = \pm 2$, e sono tutti poli semplici. L'unica che appartiene all'interno di $C_2(i)$ è $i\sqrt{2}$. Il residuo di f in questo punto è
$$\operatorname{res}(f, i\sqrt{2}) = \frac{1}{D(z^4-2z^2-8)\big|_{z=i\sqrt{2}}} = \frac{1}{4(i\sqrt{2})^3-4i\sqrt{2}} = \frac{i}{12\sqrt{2}}\,,$$
e quindi l'integrale è
$$\int_{C_2(i)} \frac{1}{z^4-2z^2-8}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, i\sqrt{2}) = \frac{\pi i}{6\sqrt{2}}\,.$$
Esempio 7 Calcoliamo
$$\int_{C_3(1)} \frac{2z+1}{z(z+1)}\, dz\,,$$
dove $C_3(1)$ è la circonferenza di centro 1 e raggio 3 percorsa una volta in senso antiorario. Le singolarità della funzione integranda f sono $z=0$ e $z=-1$ e sono entrambe poli del primo ordine. Entrambe cadono all'interno di $C_3(1)$. Poiché
$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = 1\,, \qquad \operatorname{res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = 1\,,$$
dal teorema dei residui si ottiene
$$\int_{C_3(1)} \frac{2z+1}{z(z+1)}\, dz = 2\pi i \big[\operatorname{res}(f,0) + \operatorname{res}(f,-1)\big] = 4\pi i\,.$$
Esempio 8 Calcoliamo
$$\int_{C_2(0)} \frac{\operatorname{sen}(1/z)}{z-1}\, dz\,,$$
dove $C_2(0)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario. Denotiamo con f la funzione integranda. Le sue singolarità sono $z=0$ e $z=1$ e cadono entrambe all'interno di $C_2(0)$. Poiché
$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \operatorname{sen} 1\,,$$
$z=1$ è un polo del primo ordine e $\operatorname{res}(f,1) = \operatorname{sen} 1$. Per quanto riguarda il residuo in $z=0$, si osservi che essa è una singolarità essenziale perché considerando la restrizione di f all'asse reale si dimostra facilmente che essa non ha limite per $z \to 0$. Calcoliamo lo sviluppo di Laurent di f di centro $z_0 = 0$. Poiché
$$\operatorname{senh}(1/z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}}\,, \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} z^\ell\,,$$

si ottiene

$$f(z) = -\sum_{\ell,k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{\ell-2k-1} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{\ell-2k-1=n \\ \ell,k\geq 0}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right) z^n .$$

Se ne deduce che

$$\operatorname{res}(f,0) = -\sum_{\substack{\ell-2k-1=-1 \\ \ell,k\geq 0}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = -\sum_{\substack{\ell=2k \\ \ell,k\geq 0}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = -\operatorname{sen} 1 .$$

Con il teorema dei residui si ottiene

$$\int_{C_2(0)} \frac{\operatorname{sen}(1/z)}{z-1}\, dz = 2\pi i \big[\operatorname{res}(f,1) + \operatorname{res}(f,0) \big] = 0 .$$

Ordini di una funzione

Sia f una funzione olomorfa in un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in A$ zero di f, $f(z_0) = 0$. Supponiamo che f non sia identicamente nulla in un intorno di z_0. Poiché

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \qquad \forall\, z \in B_r(z_0)\,,\ \exists\, r > 0\,,$$

esiste $m \geq 1$ tale che $f^{(j)}(z_0) = 0$ per ogni $j = 0, \ldots, m-1$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, cioè la prima derivata non nulla di f in z_0 è quella di ordine m. Infatti, se tutte le derivate di f in z_0 fossero nulle, f sarebbe identicamente nulla in $B_r(z_0)$, contro l'ipotesi. Allora se $z \in B_r(z_0)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-m} \\ &\overset{k=n-m}{=} (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} (z-z_0)^k = (z-z_0)^m Q(z)\,, \end{aligned}$$

dove

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} (z-z_0)^k$$

è una funzione olomorfa in $B_r(z_0)$ tale che $Q(z_0) = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$. In tal caso, cioè se f si "fattorizza" come $f(z) = (z-z_0)^m Q(z)$ in un intorno $B_r(z_0)$ di z_0, dove $m \geq 1$ e $Q \in H(B_r(z_0))$ con $Q(z_0) \neq 0$, allora z_0 si dice *zero di molteplicità m per f*. Per quanto esposto sopra, uno zero isolato di una funzione olomorfa ha sempre una molteplicità non nulla.

Esempio 9 La funzione $z \mapsto \operatorname{sen} z$ ha in $z_0 = 0$ uno zero di molteplicità 1. Infatti, dallo sviluppo di Taylor della funzione seno in $z_0 = 0$ si deduce che

$$\operatorname{sen} z = z \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{z} = z \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = z Q_1(z)\,,$$

dove

$$Q_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ (è somma di una serie di potenze con raggio di convergenza pari a quello della serie di $\operatorname{sen} z$, e quindi infinito) e $Q_1(0) = 1 \neq 0$. Analogamente si dimostra che la funzione $z \mapsto \cos z - 1$ ha in $z_0 = 0$ uno zero di molteplicità 2. Infatti, sfruttando lo sviluppo di Taylor in $z_0 = 0$ della funzione coseno si ottiene

$$\cos z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} \overset{k=n-1}{=} z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!} = z^2 Q_2(z)\,,$$

dove

$$Q_2(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}$$

è funzione intera per motivi analoghi a quelli per cui lo è Q_1. Inoltre, $Q_2(0) = -1/2 \neq 0$.

Un procedimento analogo di "fattorizzazione" di una funzione si può introdurre nel caso di un polo. Infatti, se z_0 è polo di ordine $m \geq 1$ per una funzione f, allora lo sviluppo di Laurent di f di centro z_0 si scrive come in (4) con φ funzione olomorfa in un opportuno intorno $B_r(z_0)$ di z_0 e $c_{-m} \neq 0$. Da (4) deduciamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m \varphi(z) \right] \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot P(z)\,, \end{aligned}$$

dove

$$P(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m \varphi(z)$$

è olomorfa in $B_r(z_0)$ e $P(z_0) = c_{-m} \neq 0$.

Esempio 10 Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{i(z-1)} - 1}{(z-1)^4}\,.$$

Poiché

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{e^{i(z-1)} - 1}{z-1} = i\,,$$

$z_0 = 1$ è polo del terzo ordine per f. Si noti che sfruttando lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale di ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^4} \cdot \left(e^{i(z-1)} - 1 \right) = \frac{1}{(z-1)^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (z-1)^n = \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (z-1)^{n-1} \\ &\overset{k=n-1}{=} \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!} (z-1)^k = \frac{1}{(z-1)^3} P(z)\,, \end{aligned}$$

dove

$$P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!}(z-1)^k$$

è funzione intera perché somma di una serie di potenze con raggio di convergenza infinito, ed inoltre $P(1) = i \neq 0$.

Per gli zeri isolati ed i poli di una funzione si dá la seguente

Definizione 4 *Sia z_0 zero di molteplicità m o polo di ordine m per una funzione di variabile complessa f, $m \geq 1$. Allora si definisce l'ordine di f in z_0 come*

$$\operatorname{ord}(f, z_0) = \begin{cases} m & \textit{se } z_0 \textit{ è zero di molteplicità } m \textit{ per } f\,, \\ -m & \textit{se } z_0 \textit{ è polo di ordine } m \textit{ per } f\,. \end{cases}$$

Ad esempio, poiché per come abbiamo visto $z = 0$ è zero di molteplicità 2 per $z \mapsto \cos z - 1$, e $z = 1$ è polo di ordine 3 per $z \mapsto (e^{i(z-1)} - 1)/(z-1)^4$, si ha

$$\operatorname{ord}(\cos z - 1, 0) = 2\,, \quad \operatorname{ord}\left(\frac{e^{iz} - 1}{(z-1)^4}, 1\right) = -3\,.$$

Teorema dell'indicatore logaritmico

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\gamma : [a, b] \to A$ curva chiusa regolare a tratti con sostegno in A non passante per alcun zero di f ($f(\gamma(t)) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$). Allora $f \circ \gamma$ è una curva in $\mathbb{C}$ non passante per zero ed è quindi possibile calcolarne l'indice di avvolgimento attorno a zero: si ottiene

$$\operatorname{ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{s}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds\,,$$

che dice quante volte la curva $f \circ \gamma$ gira attorno a $z_0 = 0$. Il teorema dell'indicatore logaritmico si propone di dare una formula per calcolare $\operatorname{ind}(f \circ \gamma, 0)$ applicando il teorema dei residui per il calcolo dell'integrale di f'/f lungo γ. Nel seguito, data una funzione f meromorfa[1] in un aperto A di $\mathbb{C}$, indichiamo con $\mathcal{Z}(f)$ l'insieme degli zeri di f in A e con $\mathcal{P}(f)$ l'insieme dei poli di f in A,

$$\mathcal{Z}(f) = \big\{a \in A : f(a) = 0\big\}\,, \qquad \mathcal{P}(f) = \big\{a \in A : a \text{ è polo per } f\big\}\,.$$

Teorema 3 (dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento) *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e f funzione meromorfa in A con un numero finito di zeri. Sia γ curva chiusa regolare a tratti in A il cui sostegno non contiene poli o zeri di f, omotopa ad un punto in A. Allora*

$$\operatorname{ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = \sum_{a \in Z(f) \cup P(f)} \operatorname{ord}(f, a) \operatorname{ind}(\gamma, a)\,.$$

[1] Una funzione f si dice meromorfa in un aperto A di $\mathbb{C}$ se f è olomorfa in A tranne al più che in un numero finito di singolarità e queste sono tutte poli.

Dim. Si osservi che le singolarità di f'/f sono gli zeri e le singolarità di f. Poiché il sostegno di γ non contiene zeri e poli di f, siamo nelle condizioni di applicare il teorema dei residui, cosicché

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = \sum_{a\in Z(f)\cup P(f)} \operatorname{res}(f'/f,a)\operatorname{ind}(\gamma,a)\,.$$

Calcoliamo i residui di f'/f. Sia a zero di molteplicità m per f. Allora $f(z)=(z-a)^m Q(z)$ con Q olomorfa in un intorno di a e tale che $Q(a)\neq 0$, e quindi

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}Q(z) + (z-a)^m Q'(z) \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\,.$$

Allora si ottiene

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to a}\left[m + (z-a)\frac{Q'(z)}{Q(z)}\right] = m\,,$$

e quindi $z=a$ è polo di ordine 1 per f'/f e $\operatorname{res}(f'/f,a)=m=\operatorname{ord}(f,a)$. Sia ora a polo di ordine m per f, cosicché $f(z)=P(z)/(z-a)^m$ con P olomorfa in un intorno di a e tale che $P(a)\neq 0$. Procedendo come sopra si ottiene

$$f'(z) = -\frac{m}{(z-a)^{m+1}}P(z) + \frac{P'(z)}{(z-a)^m} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-a} + \frac{P'(z)}{P(z)}\,.$$

Allora

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to a}\left[-m + (z-a)\frac{P'(z)}{P(z)}\right] = -m\,,$$

e di nuovo $z=a$ è polo di ordine 1 per f'/f e $\operatorname{res}(f'/f,a)=-m=\operatorname{ord}(f,a)$. Se ne deduce che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = \sum_{a\in Z(f)\cup P(f)} \operatorname{res}(f'/f,a)\operatorname{ind}(\gamma,a) = \sum_{a\in Z(f)\cup P(f)} \operatorname{ord}(f,a)\operatorname{ind}(\gamma,a)\,,$$

come si voleva. □

Se la curva γ che compare nel teorema dell'indicatore logaritmico è un circuito con interno U, allora gli unici punti con indice di avvolgimento non nullo sono quelli appartenenti ad U, che hanno indice 1, come già abbiamo osservato. Allora il teorema implica che

$$\operatorname{ind}(f\circ\gamma,0) = \big\{\text{numero degli zeri di } f \text{ in } U\big\} - \big\{\text{numero dei poli di } f \text{ in } U\big\}\,,$$

dove gli zeri sono contati con la loro molteplicità e i poli con il loro ordine.

Esercizi

1. Si classifichino le singolarità delle seguenti funzioni di variabile complessa

$$f_1(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3(z-2\pi)}\,,\qquad f_2(z) = \frac{1}{\operatorname{senh}(1/z)}\,,\qquad f_3(z) = \frac{\cosh z - 1}{z^4(z-2\pi i)^2}\,,$$

$$f_4(z) = \frac{e^{1/z}-1}{(2\pi i z-1)^3}\,,\qquad f_5(z) = \frac{z}{(z^2+z+1)^2(z^4-16)^3}\,,\qquad f_6(z) = \frac{e^{i\pi z}+1}{(z^3-1)(z^2+1)}\,.$$

2. Si calcolino i residui delle seguenti funzioni di variabile complessa nelle loro singolarità

$$f_1(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-2z+2)^2}\,, \qquad f_2(z) = \frac{z-\sqrt{2\pi}}{\cos(z^2)-1}\,, \qquad f_3(z) = \frac{\cosh(1/z)}{1-z}\,,$$

$$f_4(z) = \operatorname{senh}\frac{1}{z-1} - \frac{1-\cos(z+i)}{z^4-1}\,, \qquad f_5(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2(z^2+1)^2}\,, \qquad f_6(z) = \frac{1}{(z-2)^2}e^{\frac{1}{(1-z)^2}}\,.$$

3. Si scriva una funzione f di variabile complessa olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{1, 4i, -4\}$ che abbia una singolarità essenziale in $z = 4i$, un polo del primo ordine in $z = 1$, un polo del secondo ordine in $z = -4$, e che soddisfi

$$\int_{C_5(0)} f(z)\; dz = 5\pi i\,,$$

dove $C_5(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 5 percorsa una volta in senso antiorario. Si calcoli poi il seguente integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{\big(1-\cos(\pi z)\big)^2 f(z)}{(z-2)^4}\; dz\,.$$

(È possibile prendere visione della soluzione alla pagina web
`http://www.math.unipd.it/~marson/didattica/aa0708/corapp3.pdf`)

4. Sia $m \in \mathbb{Z}$ e si ponga

$$f_m(z) = \frac{e^z-1}{(z-2\pi i)^m}\,,.$$

Si classifichino le singolarità di f_m e si calcoli

$$\int_{C_{3\pi}(0)} f_m(z)\; dz$$

al variare di $m \in \mathbb{Z}$, dove $C_{3\pi}(0)$ indica la circonferenza centrata nell'origine e raggio 3π percorsa una volta in senso antiorario.
(È possibile prendere visione della soluzione alla pagina web
`http://www.math.unipd.it/~marson/didattica/aa0708/corapp5.pdf`)

5. Siano $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, e

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1} + \frac{cz}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,.$$

1. Si classifichino le singolarità di f al variare di $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.
2. Si determini c in modo che
$$\int_{C_1(1/2)} f(z)\, dz = 0\,,$$
dove $C_1(1/2)$ è la circonferenza di centro $1/2$ e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario.

(È possibile prendere visione della soluzione alla pagina web
`http://www.math.unipd.it/~marson/didattica/aa0809/corapp1.pdf`)

6. Sia f funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne che in un numero finito di singolarità $z_1, \dots, z_n$. Dimostrare che se $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, allora $\sum_{i=1}^n \operatorname{res}(f, z_i) = 0$.
(È possibile prendere visione della soluzione alla pagina web
`http://www.math.unipd.it/~marson/didattica/aa0809/corapp2.pdf`)

7. Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+4)^2} + a\frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}(\pi z/2)} + z\cosh\frac{1}{z}\,,$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è un parametro.

1. Classificare le singolarità di f al variare di $a \in \mathbb{C}$.

2. Determinare a in modo che
$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0\,,$$
dove γ è il rettangolo di vertici $3-i$, $3+3i$, $-1+3i$, $-1-i$ percorso una volta in senso antiorario.

(È possibile prendere visione della soluzione alla pagina web
`http://www.math.unipd.it/~marson/didattica/aa0809/corapp4.pdf`)