

Complementi di topologia, limiti e calcolo differenziale in più variabili

Norma euclidea e disuguaglianze

Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, si definisce il prodotto scalare tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ come

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \doteq \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1)$$

La norma euclidea del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2)$$

La norma euclidea gode delle seguenti proprietà

$$1) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$2) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

$$3) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

La dimostrazione delle prime due è facile ed è lasciata al lettore, per dimostrare (5), detta *disuguaglianza triangolare*, ci serve il seguente

Teorema 1 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è verificata

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad (6)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti.

Dim. Si osservi che (6) è banalmente verificata se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ è il vettore nullo. Supponiamo allora che $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un parametro, il cui valore verrà fissato più avanti. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Posto $\lambda = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \|\mathbf{y}\|^2$ si ottiene

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^4} \|\mathbf{y}\|^2,$$

da cui (6) discende facilmente. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti, la verifica che (6) vale come uguaglianza è lasciata al lettore. Supponiamo allora che valga

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ entrambi non nulli, e dimostriamo che allora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti. Sfruttando quanto fatto in precedenza si ottiene

$$\left\| \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} \right\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^4} \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = 0,$$

da cui si ottiene che

$$\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

e quindi la dipendenza lineare tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, come si voleva. $\square$

Ora usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dimostriamo la disuguaglianza triangolare (5). Poiché da (6) si deduce che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2, \end{aligned}$$

da cui la conclusione.

Chiusi e punti di accumulazione

Gli insiemi chiusi possono essere caratterizzati tramite i loro punti di accumulazione. Vale infatti la seguente

Proposizione 1 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Allora E è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dim. Supponiamo che E sia chiuso e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per E . Per assurdo, assumiamo che $\mathbf{x}_0 \notin E$, cosicché, essendo il complementare di E aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{C}E$. Allora $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ non contiene punti di E , contro l'ipotesi che $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione. Viceversa, supponiamo che E contenga tutti i suoi punti di accumulazione e dimostriamo che allora è chiuso. Per assurdo assumiamo che non lo sia. Allora il suo complementare non è aperto e quindi contiene un punto $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap E \neq \emptyset$. Allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di accumulazione per E che non appartiene ad E , contro l'ipotesi. $\square$

Limiti di funzioni in più variabili

La proposizione che segue permette di caratterizzare il limite di una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, tramite i limiti delle sue componenti.

Proposizione 2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ di accumulazione per X e $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$.*

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ se e solo se $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow \ell_i$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

2. $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ se e solo se $\|f(\mathbf{x})\| \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Dim.

1. Supponiamo dapprima che $f(\mathbf{x}) \rightarrow \ell$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che se $\mathbf{x} \in U \cap X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon.$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si ha

$$|f_i(\mathbf{x}) - \ell_i| = \sqrt{|f_i(\mathbf{x}) - \ell_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m |f_k(\mathbf{x}) - \ell_k|^2} = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e trovato U intorno di $\mathbf{x}_0$ come sopra, si deduce che se $\mathbf{x} \in U \cap X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, allora

$$|f_i(\mathbf{x}) - \ell_i| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon,$$

e quindi f_i ha limite ℓ_i per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Supponiamo ora che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ f_i abbia limite ℓ_i per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_i di $\mathbf{x}_0$ tale che

$$\mathbf{x} \in U_i \cap X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \implies |f_i(\mathbf{x}) - \ell_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Poniamo $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$, che è ancora un intorno di $\mathbf{x}_0$. Allora vale

$$\mathbf{x} \in U \cap X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \implies |f_i(\mathbf{x}) - \ell_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Quindi se $\mathbf{x} \in U \cap X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, si ha

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x}) - \ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

da cui la conclusione.

2. Dalla definizione di limite, $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste un intorno U di $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in U \cap X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, vale $\|f(\mathbf{x})\| > M$: ma questo equivale a dire che $\|f(\mathbf{x})\| \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

□

Attenzione che la condizione $\ell \neq \infty$ nel primo asserto della proposizione 2 è essenziale. Infatti, se esiste $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $|f_i(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora possiamo concludere che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ perché $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \geq |f_i(\mathbf{x})|$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $\mathbf{x} \in X$. Non vale però il

viceversa: se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ non è detto che esista $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $|f_i(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Ad esempio si consideri la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (2k, 0) & \text{se } 2k \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ (0, 2k+1) & \text{se } 2k+1 \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Allora si ha $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = k$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tale che $k \leq \|\mathbf{x}\| < k+1$, $k \in \mathbb{N}$, e questo basta per concludere che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Le componenti di $\mathbf{f}$ però non hanno limite per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ perché valgono

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2k & \text{se } 2k \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{se } 2k+1 \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+2, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2k \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k+1 & \text{se } 2k+1 \leq \|\mathbf{x}\| < 2k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Successioni e punti di accumulazione

I punti di accumulazione di un insieme non vuoto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ possono essere caratterizzati tramite i limiti di successioni a valori in E . Questo è il contenuto della seguente

Proposizione 3 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ è punto di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in $E \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ tale che $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ per $k \rightarrow +\infty$.*

Dim. Supponiamo che $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ sia punto di accumulazione per E e costruiamo una successione a valori in $E \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ che abbia limite $\bar{\mathbf{x}}$. Distinguiamo due casi

1. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Poiché $\bar{\mathbf{x}}$ è di accumulazione per E , per ogni $k \geq 1$ esiste $\mathbf{x}_k \in E \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ tale che $\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| < 1/k$. Allora la successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ così costruita è quella che fa al caso nostro, perché $\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$.
2. $\bar{\mathbf{x}} = \infty$. In questo caso per ogni $k \geq 1$ esiste un elemento $\mathbf{x}_k \in E$ tale che $\|\mathbf{x}_k\| > k$. Allora $\|\mathbf{x}_k\| \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$, e quindi $\mathbf{x}_k \rightarrow \infty = \bar{\mathbf{x}}$ per $k \rightarrow +\infty$.

□

Limiti e restrizioni

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ di accumulazione per X e $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzione. Se $A \subseteq X$ ha $\mathbf{x}_0$ come punto di accumulazione, detta $\mathbf{f}|_A : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ la restrizione di $\mathbf{f}$ ad A , si pone

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in A}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \doteq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}|_A(\mathbf{x}).$$

Allora vale il seguente

Teorema 2 Siano X , $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{f}$ come sopra. Allora $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ se e solo se per ogni $A \subseteq X$ tale che $\mathbf{x}_0$ sia di accumulazione per A si ha

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in A}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell. \quad (7)$$

Dim. Supponiamo che $\mathbf{f}$ abbia limite ℓ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, e sia $A \subseteq X$ tale che $\mathbf{x}_0$ sia di accumulazione per A . Fissata una qualunque successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ a valori in $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ e con limite $\mathbf{x}_0$, questa è anche una successione a valori in $X \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ e quindi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \ell$ per il teorema ponte. Sempre per il teorema ponte si conclude allora che $\mathbf{f}|_A(\mathbf{x}_k) \rightarrow \ell$ per $k \rightarrow +\infty$, da cui la tesi.

Supponiamo ora che valga (7) per un qualche fissato $\ell \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ e per ogni $A \subseteq X$ che abbia $\mathbf{x}_0$ come punto di accumulazione. Sia $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ una qualunque successione a valori in $X \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ con limite $\mathbf{x}_0$. Allora se A è l'insieme dei valori assunti dalla successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$, è evidente che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in A}} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

e quindi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \ell$ per $k \rightarrow +\infty$. Data l'arbitrarietà della successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$, il teorema ponte ci permette di concludere che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. $\square$

Proprietà delle funzioni continue

Ricordiamo che un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto (per successioni) se ogni successione a valori in E ha una sottosuccessione convergente ad un punto di E . Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi compatti:

Teorema 3 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dim. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto: proviamo che è chiuso e limitato. Per provare che è chiuso, usiamo la proposizione 1 e dimostriamo che contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Sia allora $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione di E . Grazie alla proposizione 3 esiste una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in $E \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ convergente a $\bar{\mathbf{x}}$. Poiché $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente ad un punto di E , questo non può che essere $\bar{\mathbf{x}}$, che quindi appartiene ad E come si voleva.

Sia ora E chiuso e limitato. Fissata una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in E questa risulta limitata perché tale è E , e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass ha una sottosuccessione $\{\mathbf{x}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Allora delle due l'una

1. $\mathbf{x}_{k_j} \neq \bar{\mathbf{x}}$ per ogni j , e quindi $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione di E per la proposizione 3. Essendo E chiuso, dalla proposizione 1 segue che $\bar{\mathbf{x}}$ è un elemento di E .
2. $\mathbf{x}_{k_j} = \bar{\mathbf{x}}$ per qualche j , e quindi $\bar{\mathbf{x}} \in E$.

In ogni caso risulta $\bar{\mathbf{x}} \in E$, cosicché $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di E . Si conclude che allora E è compatto. $\square$

Teorema 4 Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Allora $\mathbf{f}(X)$ è compatto.

Dim. Sia $\{\mathbf{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{f}(X)$ successione, dobbiamo dimostrare che possiamo estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di $\mathbf{f}(X)$. Sia $\mathbf{x}_k \in X$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$. Essendo X compatto, la successione $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ha una sottosuccessione $\{\mathbf{x}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $\bar{\mathbf{x}}$ di X . Essendo $\mathbf{f}$ continua, si ha che $\mathbf{y}_{k_j} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_j}) \rightarrow \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \in \mathbf{f}(X)$ per $j \rightarrow +\infty$, e quindi $\{\mathbf{y}_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ è la sottosuccessione cercata. $\square$

Dal teorema appena dimostrato segue immediatamente il

Corollario 1 (Teorema di Weierstrass) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo, cioè esistono $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in X$ tali che*

$$f(\mathbf{x}_m) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}_M) = \max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}).$$

Dim. Per il teorema 4, $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$, e quindi chiuso e limitato per il teorema 3. Essendo limitato, esso ha estremi inferiore e superiore in $\mathbb{R}$. Essendo chiuso, tali estremi sono rispettivamente minimo e massimo di $f(X)$, e quindi minimo e massimo di f . $\square$

Esercizi

1. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x+y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy) - \arctan(xy)}{x^2+y^2}, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^3}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+ye^x}{x+y}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y \ln(1+x)}{x+y}. \end{array}$$

2. Si studi continuità, derivabilità e differenziabilità delle funzioni definite da

$$f_1(x, y) = y\sqrt{|x|}, \quad f_2(x, y) = |x-1||y|, \quad f_3(x, y) = |xy| + |x|y,$$

$$\begin{aligned} f_4(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ f_5(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1/2 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ f_6(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & \text{se } x^2+y \neq 0, \\ 0 & \text{se } x^2+y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_7(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + x^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$f_8(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin(1/y) & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

$$f_9(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^3 y - 3xy^2 \cos x}{x^2 + y^2} & \text{se } y \neq 0, \\ 1 + x - \cos x & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

3. Si considerino le funzioni in due variabili reali definite da

$$f_1(x, y) = -(2x^2 + 3y^2 - 1)^2, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{1 - x^2 + y^2},$$

$$f_3(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2, \quad f_4(x, y) = x^2 \sin y,$$

$$f_5(x, y) = \arctan[(x+1)^2 + ye^y], \quad f_6(x, y) = (x+1)(y+2) \ln(x+y),$$

$$f_7(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad f_8(x) = \cosh\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Per ciascuna di esse si chiede di

1. determinare il dominio;
2. calcolare i punti critici;
3. calcolare la matrice hessiana di f nei punti critici e determinare la natura di questi;
4. scrivere le equazioni dei piani tangenti nei punti

$$(1, 0, -1) \text{ per } f_1; \quad (1, 1, 1) \text{ per } f_2; \quad (2, 0, 9) \text{ per } f_3; \quad (1, \pi/2, 1) \text{ per } f_4;$$

$$(1, \pi/2, 1) \text{ per } f_5; \quad (1, 1, 6 \ln 2) \text{ per } f_6, \quad (0, \sqrt{3}, \pi/3) \text{ per } f_7, \quad (0, 0, 1) \text{ per } f_8.$$

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni si chiede di determinarne il dominio e ricercarne i punti di estremo locale ed assoluto negli insiemi indicati a lato

$$f_1(x, y) = \cos x^2 + \sin y^2 \quad \text{in } [0, \pi] \times [0, \pi],$$

$$f_2(x, y) = x^2 + x - 3y^2 \quad \text{in } \overline{B_2(1, 1)},$$

$$f_3(x, y) = e^{x-y} + x + y \quad \text{nel quadrilatero di vertici } (1, 0), (0, 2), (-3, 0), (0, -2),$$

$$f_4(x, y) = \ln(x^2 - y^2) \quad \text{in } \overline{B_1(-2, 0)},$$

$$f_5(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \quad \text{in } \overline{B_3(0, 0)} \setminus \overline{B_1(0, 0)},$$

$$f_6(x, y) = \arcsin(x^2 - y^2) \quad \text{nel quadrato di vertici } (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1),$$

$$f_7(x, y, z) = x^2 - y^2 + z \quad \text{in } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$