

Complementi di equazioni differenziali ordinarie

1 Teoria generale

1.1 Funzioni localmente lipschitziane

Ricordiamo la seguente

Definizione 1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice localmente lipschitziana se per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esiste una costante $L_{\mathcal{K}} > 0$ tale che

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\| \leq L_{\mathcal{K}} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}.$$

Proposizione 1 Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^1$. Allora $\mathbf{f}$ è localmente lipschitziana.

Dim. Per provare che $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ è localmente lipschitziana, è sufficiente provare che lo è ciascuna delle sue componenti $f_1, \dots, f_m$. Inoltre, fissata una componente f_j , è sufficiente provare che f_j è lipschitziana in ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ che sia una palla chiusa. Fissato un tale compatto, essendo f_j di classe $\mathcal{C}^1$, per il teorema di Weierstrass, esiste una costante $L_{\mathcal{K},j} > 0$ tale che $\|\nabla f_j(\mathbf{x})\| \leq L_{\mathcal{K},j}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$. Siano ora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$, e osserviamo che, essendo $\mathcal{K}$ convesso (è una palla chiusa), il segmento $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ è interamente contenuto in $\mathcal{K}$. Per il teorema della media esiste un punto $\xi \in]\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2[$ tale che

$$f_j(\mathbf{x}_2) - f_j(\mathbf{x}_1) = \langle \nabla f_j(\xi), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle.$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il fatto che $\xi \in \mathcal{K}$, si ottiene

$$|f_j(\mathbf{x}_2) - f_j(\mathbf{x}_1)| \leq \|\nabla f_j(\xi)\| \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leq L_{\mathcal{K},j} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|,$$

come si voleva. □

La proposizione 1 non si può invertire: esistono funzioni che non sono $\mathcal{C}^1$ ma che sono lipschitziane, ad esempio $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, che non è derivabile nell'origine ma è lipschitziana su tutto $\mathbb{R}^n$ (non solo localmente) perché verifica

$$|\|\mathbf{x}_2\| - \|\mathbf{x}_1\|| \leq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Ciononostante quello che si può dire è che se una funzione ha una derivata parziale illimitata, allora sicuramente non è (localmente) lipschitziana.

1.2 Risultati sul problema di Cauchy

Il lemma che segue è particolarmente utile per effettuare delle stime. Il suo uso sarà chiarito nella dimostrazione del teorema 1.

Lemma 1 (di Gronwall) Siano $b, L > 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $t_0 \in I$, $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua non negativa. Se

$$h(t) \leq b + L \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \forall t \in I, t \geq t_0,$$

allora

$$h(t) \leq b \cdot e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in I, t \geq t_0. \quad (1)$$

Dim. Sia

$$w(t) = b + L \int_{t_0}^t h(s) ds \quad t \in I.$$

Allora $h(t) \leq w(t)$ per ogni $t \in I$ con $t \geq t_0$. Inoltre

$$w'(t) = Lh(t) \leq Lw(t) \quad \forall t \in I, t \geq t_0.$$

Poiché $w(t) \geq b > 0$ per $t \in I, t \geq t_0$, si ottiene che $w'(t)/w(t) \leq L$ per $t \in I, t \geq t_0$. Integrando questa disuguaglianza tra t_0 e $t > t_0$ si ottiene

$$\ln w(t) - \ln w(t_0) \leq L(t - t_0),$$

da cui $w(t) \leq w(t_0)e^{L(t-t_0)} = be^{L(t-t_0)}$, e quindi (1) grazie al fatto che $h(t) \leq w(t)$ per ogni $t \in I$ con $t \geq t_0$. $\square$

Corollario 1 Siano $L > 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $t_0 \in I$ e $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua non negativa tale che

$$h(t) \leq L \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \forall t \in I, t \geq t_0,$$

allora $h(t) = 0$ per ogni $t \geq t_0, t \in I$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ si ha

$$h(t) \leq \varepsilon + L \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \forall t \in I, t \geq t_0,$$

e quindi grazie al lemma di Gronwall

$$h(t) \leq \varepsilon \cdot e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in I, t \geq t_0.$$

da cui la conclusione per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ed essendo $h(t) \geq 0$ in $I \cap [t_0, +\infty[$. $\square$

Teorema 1 (unicità) Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\mathbf{f} : I \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua e localmente lipschitziana rispetto alla variabile $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, cioè tale che per ogni $\mathcal{K} \subseteq I \times \mathcal{V}$ compatto esiste $L_{\mathcal{K}} > 0$ per cui

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1)\| \leq L_{\mathcal{K}} \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| \quad \forall (t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in \mathcal{K}. \quad (2)$$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (3)$$

ha al più una soluzione in un intervallo aperto I_0 contenente t_0 .

Dim. Supponiamo che il problema di Cauchy ammetta due soluzioni, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2(t)$, definite entrambe in un intervallo aperto I_0 contenente t_0 : proviamo che allora $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$ per ogni $t \in I_0$. Per farlo, dimostriamo che l'uguaglianza vale in ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq I_0$ contenente t_0 . Sia allora $[\alpha, \beta] \subseteq I_0$ contenente t_0 e sia t un altro elemento di $[\alpha, \beta]$, e per fissare le idee assumiamo che $t \geq t_0$. Sia $\mathcal{K}$ un compatto di $I \times \mathcal{V}$ contenente gli insiemi $[\alpha, \beta] \times \mathbf{y}_1([\alpha, \beta])$ e $[\alpha, \beta] \times \mathbf{y}_2([\alpha, \beta])$. Sia inoltre $L_{\mathcal{K}}$ la costante che compare in (2) relativa a tale $\mathcal{K}$. Grazie a (3) e per il teorema fondamentale del calcolo valgono

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s)) ds, \quad \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) ds.$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze si ottiene

$$\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s))] ds,$$

e quindi, usando (2) e la scelta di $\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s))] ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s))\| ds \\ &\leq L_{\mathcal{K}} \int_{t_0}^t \|\mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s)\| ds. \end{aligned}$$

Allora, grazie al corollario 1 si ha $\|\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t)\| = 0$ per ogni $t \geq t_0$, $t \in I_0$, come si voleva. $\square$

Teorema 2 (esistenza globale) Siano $I =]a, b[$ intervallo aperto e $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua, localmente lipschitziana rispetto alla variabile $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e tale che esiste una funzione $L \in \mathcal{C}^0(I)$ non negativa per cui vale

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L(t)(1 + \|\mathbf{y}\|) \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in I \times \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Allora l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy (3) è l'intervallo I .

Dim. Assumiamo per assurdo che la soluzione non sia definita in tutto l'intervallo I , cosicché troviamo un intervallo $]a_0, b_0[\subset]a, b[$ tale che vale almeno una delle due seguenti affermazioni

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| &\rightarrow +\infty \quad \text{per } t \rightarrow a_0^+ & \text{e} & & a_0 > a, \\ \|\mathbf{y}(t)\| &\rightarrow +\infty \quad \text{per } t \rightarrow b_0^- & \text{e} & & b_0 < b. \end{aligned} \quad (5)$$

Per fissare le idee, assumiamo che valga quest'ultima, cosicché esiste $t_1 \in]a_0, b_0[$ tale che $\|\mathbf{y}(t)\| \geq 1$ per ogni $t \in [t_1, b_0[$, con $b_0 < b$. Cerchiamo una stima $\|\mathbf{y}(t)\|^2$, e proviamo che è limitata in $[t_1, b_0[$, trovando così un assurdo. Denotiamo con L il massimo della funzione $t \mapsto L(t)$ in $[t_1, b_0]$, che esiste grazie al teorema di Weierstrass. Si osservi che, se $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, allora per ogni $t \in [t_1, b_0[$ vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} [y_1^2(t) + \dots + y_n^2(t)] = 2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) + \dots + 2y_n(t)y_n'(t) \\ &= 2\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t) \rangle = 2\langle \mathbf{y}(t), \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \rangle \leq 2L\|\mathbf{y}(t)\|(1 + \|\mathbf{y}(t)\|) \\ &\leq 4L\|\mathbf{y}(t)\|^2, \end{aligned}$$

dove si sono usate la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e (4), e sfruttato il fatto che $\|\mathbf{y}(t)\| \geq 1$ per ogni $t \in [t_1, b_0[$. Posto $z(t) = e^{-4Lt}\|\mathbf{y}(t)\|^2$, per $t \in [t_1, b_0[$ si ha

$$z'(t) = e^{-4Lt}[-4L\|\mathbf{y}(t)\|^2 + D_t\|\mathbf{y}(t)\|^2] \leq e^{-4Lt}[-4L\|\mathbf{y}(t)\|^2 + 4L\|\mathbf{y}(t)\|^2] = 0,$$

e quindi $t \mapsto z(t)$ è decrescente nell'intervallo $[t_1, b_0[$. Allora $z(t) \leq z(t_1)$ per ogni $t \in [t_1, b_0[$, da cui si deduce

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 \leq e^{4L(t-t_1)}\|\mathbf{y}(t_1)\|^2 \leq e^{4L(b_0-t_1)}\|\mathbf{y}(t_1)\|^2 \quad \forall t \in [t_1, b_0[,$$

e quindi $\|\mathbf{y}(t)\| \not\rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow b_0^-$, contro l'ipotesi (5). $\square$

Soluzioni di un problema di Cauchy che “vivono” in un intervallo $]a_0, b_0[$ e non possono essere prolungate oltre si dicono massimali. In particolare, si usa la seguente

Definizione 2 Sia $\varphi = \varphi(t)$ soluzione di (3) definita in un intervallo I_0 . Allora φ si dice soluzione massimale se non esiste un'altra soluzione $\psi = \psi(t)$ definita in un intervallo I_1 tale che $I_0 \subset I_1$. In altre parole, φ è soluzione massimale se non può essere estesa ad un intervallo contenente I_0 .

Ad esempio, dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

la funzione $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = 1/x$ è massimale: non può essere estesa ad un intervallo contenente $]0, +\infty[$ perché $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$. Invece, la funzione $\psi :]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\psi(x) = 1/x$ è ancora soluzione del problema dato, ma non è massimale: si noti che φ e ψ coincidono nell'intervallo di definizione di ψ , e questo non deve sorprendere perché vale il teorema 1 di unicità della soluzione del problema di Cauchy (la funzione $y \mapsto -y^2$ è localmente lipschitziana essendo di classe $\mathcal{C}^1$).

Il teorema 2 si può riparafrasare dicendo che se $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziana nella variabile $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e soddisfa (4), allora la soluzione massimale di (3) è definita in tutto l'intervallo I .

1.3 Integrali primi

Sia $\mathbf{f} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale su un aperto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo il sistema autonomo di equazioni differenziali del primo ordine

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (6)$$

Definizione 3 Una funzione $E : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ si dice integrale primo per (6) se per ogni soluzione $\varphi : I \rightarrow \mathcal{V}$ di (6) in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ si ha che $I \ni t \mapsto E(\varphi(t))$ è costante, cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $E(\varphi(t)) = c$ per ogni $t \in I$.

Proposizione 2 Sia $\mathbf{f}$ come sopra, localmente lipschitziana. Allora una funzione $E : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ è un integrale primo per (6) se e solo se

$$\langle \nabla E(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{V}. \quad (7)$$

Dim. Sia E un integrale primo per (6) e, fissato $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, sia $\varphi : I \rightarrow \mathcal{V}$ soluzione di (6) con dato iniziale $\mathbf{y}$, $\varphi(0) = \mathbf{y}$. Allora $E(\varphi(t))$ è costante in I e quindi

$$0 = \frac{d}{dt}E(\varphi(t)) = \langle \nabla E(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle \nabla E(\varphi(t)), \mathbf{f}(\varphi(t)) \rangle.$$

In particolare si ha

$$0 = \langle \nabla E(\varphi(0)), \mathbf{f}(\varphi(0)) \rangle = \langle \nabla E(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle,$$

come si voleva. Supponiamo ora che valga (7) e proviamo che allora E è un integrale primo. Sia $\varphi : I \rightarrow \mathcal{V}$ soluzione di $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$: come sopra si ha

$$\frac{d}{dt}E(\varphi(t)) = \langle \nabla E(\varphi(t)), \mathbf{f}(\varphi(t)) \rangle = 0 \quad \forall t \in I,$$

da cui la conclusione. □

Esempio 1 (Integrale dell'energia) Sia dato il sistema di equazioni del secondo ordine

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{8}$$

dove $\mathbf{f}$ è un campo vettoriale conservativo definito in un aperto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $U : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione potenziale di $-\mathbf{f}$, cioè $\nabla U(\mathbf{y}) = -\mathbf{f}(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, allora

$$E(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \frac{\|\mathbf{y}'\|^2}{2} + U(\mathbf{y}), \tag{9}$$

è un integrale primo ed è detto *integrale dell'energia*. Infatti, posto $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}'$, (8) si riscrive come il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}'_2 = \mathbf{f}(\mathbf{z}_1). \end{cases}$$

Nelle coordinate $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ la funzione E in (9) si riscrive

$$E(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \frac{\|\mathbf{z}_2\|^2}{2} + U(\mathbf{z}_1).$$

Poiché, se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\nabla \|\mathbf{x}\|^2 = \nabla (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) = 2\mathbf{x},$$

allora

$$\begin{aligned} \langle \nabla E(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), (\mathbf{z}_2, \mathbf{f}(\mathbf{z}_1)) \rangle &= \langle (\nabla U(\mathbf{z}_1), \mathbf{z}_2), (\mathbf{z}_2, \mathbf{f}(\mathbf{z}_1)) \rangle = \langle (-\mathbf{f}(\mathbf{z}_1), \mathbf{z}_2), (\mathbf{z}_2, \mathbf{f}(\mathbf{z}_1)) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{f}(\mathbf{z}_1), \mathbf{z}_2 \rangle + \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{f}(\mathbf{z}_1) \rangle = 0, \end{aligned}$$

da cui la conclusione per la proposizione 2. Alla stessa conclusione si giunge considerando una soluzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ di (8) e provando che la funzione $t \mapsto E(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))$ ha derivata identicamente nulla: si invita il lettore a cimentarsi nel calcolo.

Integrali primi per sistemi bidimensionali

Consideriamo un sistema autonomo di due equazioni del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

Se la forma differenziale

$$\omega = -b(x, y) dx + a(x, y) dy \quad (11)$$

è esatta e $U = U(x, y)$ è una sua primitiva, allora U è un integrale primo per (10). Infatti

$$\langle \nabla U(x, y), (a(x, y), b(x, y)) \rangle = \langle (-b(x, y), a(x, y)), (a(x, y), b(x, y)) \rangle = 0.$$

Spesso però la forma differenziale ω si guarda bene dall'essere esatta, ma a questo è possibile ovviare. Introduciamo la seguente

Definizione 4 Sia

$$\omega = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + \cdots + F_n(\mathbf{x}) dx_n$$

forma differenziale di classe C^1 su un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ si dice *fattore integrante* per ω se la forma differenziale

$$\tilde{\omega} = \lambda \omega = \lambda(\mathbf{x}) F_1(\mathbf{x}) dx_1 + \lambda(\mathbf{x}) F_2(\mathbf{x}) dx_2 + \cdots + \lambda(\mathbf{x}) F_n(\mathbf{x}) dx_n$$

è chiusa in Ω .

Se la forma ω in (11) non è chiusa, ma è definita in un aperto semplicemente connesso e riusciamo a trovare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$, detta $\tilde{U}$ una primitiva di

$$\tilde{\omega} = -\lambda(x, y)b(x, y) dx + \lambda(x, y)a(x, y) dy,$$

allora $\tilde{U}$ è un integrale primo per (10): infatti

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{U}(x, y), (a(x, y), b(x, y)) \rangle &= \langle (-\lambda(x, y)b(x, y), \lambda(x, y)a(x, y)), (a(x, y), b(x, y)) \rangle \\ &= \lambda(x, y) \langle (-b(x, y), a(x, y)), (a(x, y), b(x, y)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Esempio 2 Consideriamo il sistema di Lotka-Volterra (preda-predatore) che descrive il comportamento di due specie, una di predatori ed una di prede, in un ambiente chiuso,

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y, \end{cases} \quad a, b, c, d > 0. \quad (12)$$

Le costanti a, b, c, d sono caratteristiche delle due specie sotto osservazione. Evidentemente siamo interessati a soluzioni positive di (12), cioè che soddisfano $x(t), y(t) > 0$ per ogni t . Cerchiamo un integrale primo. Purtroppo la forma differenziale

$$\omega = (d - cx)y dx + (a - by)x dy, \quad x, y > 0,$$

non è chiusa, come il lettore può facilmente verificare. Cerchiamo un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$. Deve essere

$$\partial_y [\lambda(x, y)(d - cx)y] = \partial_x [\lambda(x, y)(a - by)x],$$

da cui si ottiene

$$(d - cx)[y\partial_y \lambda(x, y) + \lambda(x, y)] = (a - by)[x\partial_x \lambda(x, y) + \lambda(x, y)]. \quad (13)$$

Siccome siamo interessati a trovare *un* fattore integrante, e non tutti i fattori integranti, non vogliamo trovare tutte le soluzioni di (13). Allora semplifichiamo il problema e cerchiamo una funzione λ positiva che soddisfi

$$\begin{cases} y\partial_y \lambda(x, y) + \lambda(x, y) = 0 \\ x\partial_x \lambda(x, y) + \lambda(x, y) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce che λ soddisfa

$$\partial_y \ln \lambda(x, y) = -\frac{1}{y},$$

da cui si ottiene che $\ln \lambda(x, y) = -\ln y + \psi(x)$, dove ψ è una generica funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Allora $\lambda(x, y) = e^{\psi(x)}/y$: sfruttando questa informazione nella seconda equazione, si deduce

$$0 = x\partial_x \lambda(x, y) + \lambda(x, y) = x\partial_x [e^{\psi(x)}/y] + e^{\psi(x)}/y = x \frac{e^{\psi(x)}\psi'(x)}{y} + \frac{e^{\psi(x)}}{y}$$

e quindi deve essere $\psi'(x) = -1/x$. Presa $\psi(x) = -\ln x$, si ottiene che un fattore integrante è $\lambda(x, y) = 1/(xy)$. La forma differenziale $\tilde{\omega} = \lambda\omega$ cercata si scrive

$$\tilde{\omega} = \left(\frac{d}{x} - c\right) dx + \left(\frac{a}{y} - b\right) dy,$$

che, essendo chiusa, è esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Come è facilmente verificabile, una sua primitiva è la funzione

$$\tilde{U}(x, y) = d \ln x - cx + a \ln y - by,$$

le cui curve di livello sono traiettorie di (12) e sono riportate in figura 1. In tale figura sono rappresentate anche le rette di equazione $y = a/b$ e $x = d/c$: si osservi che il punto $(d/c, a/b)$ è un equilibrio del sistema, cioè la curva costante $(x(t), y(t)) = (d/c, a/b)$ è soluzione di (12). Poiché le curve di livello di $\tilde{U}$ sono chiuse, deduciamo che le soluzioni di (12) sono periodiche.

1.4 Equazioni differenziali esatte

Consideriamo un'equazione differenziale della forma

$$y'(x) = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}, \quad (14)$$

dove la funzione $f(x, y) = \alpha(x, y)/\beta(x, y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, almeno per quanto riguarda esistenza e unicità di soluzioni locali di un problema di Cauchy (in particolare, assumiamo $\beta(x, y) \neq 0$).

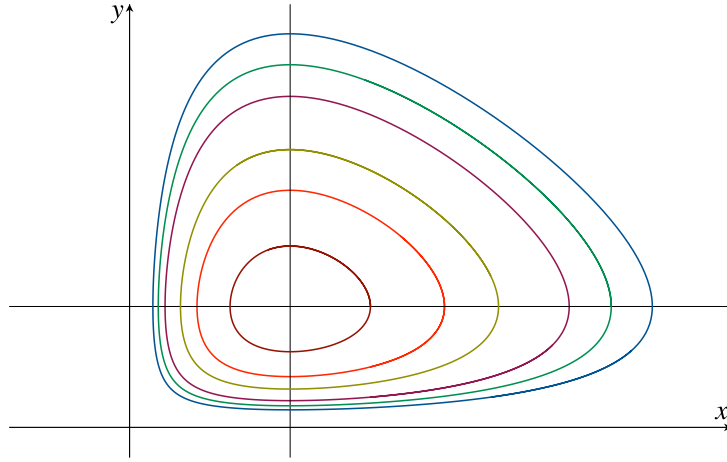


Figura 1: Curve soluzione di (12)

Proposizione 3 Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Assumiamo che la forma differenziale

$$\omega = \alpha(x, y) dx - \beta(x, y) dy, \quad (15)$$

sia esatta in Ω e che $U = U(x, y)$ sia una sua primitiva. Sia inoltre $y = y(x)$ una funzione di classe C^1 in un intervallo I il cui grafico sia contenuto in Ω . Allora, se $b(x, y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I$, y è soluzione di (14) se e solo se $x \mapsto U(x, y(x))$ è costante in I .

Dim. Per ogni $x \in I$ si ha

$$\frac{d}{dx}U(x, y(x)) = \partial_x U(x, y(x)) + y'(x) \partial_y U(x, y(x)) = \alpha(x, y(x)) - y'(x) \beta(x, y(x)). \quad (16)$$

Se $x \mapsto U(x, y(x))$ è costante in I , $D_x U(x, y(x)) = 0$ per ogni $x \in I$, ed essendo $b(x, y(x)) \neq 0$ da (16) si ricava che $y = y(x)$ è soluzione di (14). Viceversa, se $y = y(x)$ è soluzione di (14), da (16) si deduce che la funzione $x \mapsto U(x, y(x))$ ha derivata nulla per ogni $x \in I$ e quindi è costante in I . $\square$

Se la forma differenziale ω in (15) non è esatta, è possibile cercare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$. Infatti, se $\lambda(x, y) \neq 0$, $y = y(x)$ risolve (14) in un intervallo I se e solo se nello stesso intervallo è soluzione di

$$y'(x) = \frac{\lambda(x, y) \alpha(x, y)}{\lambda(x, y) \beta(x, y)},$$

e quindi se e solo se è costante la funzione $I \ni x \mapsto \tilde{U}(x, y(x))$, dove $\tilde{U}$ è una primitiva di

$$\tilde{\omega} = \lambda(x, y) \alpha(x, y) dx - \lambda(x, y) \beta(x, y) dy.$$

Esempio 3 Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{4xy \ln y - 3y}{x^2}, \quad x, y > 0 \quad (17)$$

La forma differenziale associata è

$$\omega = (4xy \ln y - 3y) dx + x^2 dy \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0},$$

che non è chiusa. Cerchiamo allora un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$: devono valere

$$\partial_y [\lambda(x, y)(4xy \ln y - 3y)] = \partial_x [\lambda(x, y)x^2],$$

da cui si ottiene

$$(4xy \ln y - 3y)\partial_y \lambda(x, y) + (4x \ln y + 4x - 3)\lambda(x, y) = x^2 \partial_x \lambda(x, y) + 2x\lambda(x, y),$$

che riscriviamo come

$$y(4x \ln y - 3)\partial_y \lambda(x, y) + (4x \ln y - 3)\lambda(x, y) = x^2 \partial_x \lambda(x, y) - 2x\lambda(x, y).$$

Se λ soddisfa

$$\begin{cases} y(4x \ln y - 3)\partial_y \lambda(x, y) + (4x \ln y - 3)\lambda(x, y) = 0 \\ x^2 \partial_x \lambda(x, y) - 2x\lambda(x, y) = 0, \end{cases}$$

allora risulta essere un fattore integrante. Dalla prima equazione ricaviamo $y\partial_y \lambda + \lambda = 0$, da cui $\lambda(x, y) = e^{\psi(x)}/y$ per una opportuna funzione ψ di classe $\mathcal{C}^1$. Sfruttando quanto trovato nella seconda equazione, si ricava che ψ soddisfa $x\psi' - 2 = 0$, di cui $\psi(x) = \ln x^2$ è soluzione. Allora $\lambda(x, y) = x^2/y$, che è funzione non nulla per $x, y > 0$. La forma differenziale che si ottiene è

$$\tilde{\omega} = \lambda\omega = (4x^3 \ln y - 3x^2) dx + \frac{x^4}{y} dy,$$

che è chiusa e quindi esatta in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$, essendo tale insieme semplicemente connesso. Una primitiva di $\tilde{\omega}$ è la funzione

$$\tilde{U}(x, y) = x^4 \ln y - x^3, \quad x, y > 0.$$

Si ottiene che $y = y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}^{>0}$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $x^4 \ln y(x) - x^3 = c$, e quindi

$$y(x) = e^{(c+x^3)/x^4}$$

fornisce l'integrale generale di (17) in $\mathbb{R}^{>0}$.

1.5 Esercizi svolti

Presentiamo un paio esercizi svolti di carattere generale sulle equazioni differenziali.

Esercizio 1 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt{\frac{1+u(x)}{1+x^2}} \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione del problema esiste unica definita in un intorno di $x = 0$ perché la funzione $u \mapsto \sqrt{1+u}$ è lipschitziana in un intorno di $u = 2$. Per trovare la soluzione procediamo per separazione di variabili. Si ottiene

$$\int_2^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Si ha

$$\int_2^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = 2\sqrt{1+u(x)} - 2\sqrt{3}, \quad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsenh} x,$$

dove

$$\operatorname{settsenh} x = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Allora

$$\begin{aligned} \sqrt{1+u(x)} = \sqrt{3} + \frac{\operatorname{settsenh} x}{2} &\implies u(x) = \left(\sqrt{3} + \frac{\operatorname{settsenh} x}{2} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{\operatorname{settsenh}^2 x}{4} + \sqrt{3} \operatorname{settsenh} x + 2. \end{aligned}$$

Si noti che la soluzione esiste fintanto che

$$\sqrt{3} + \frac{\operatorname{settsenh} x}{2} > 0,$$

cioè per $x > -\sinh(2\sqrt{3})$.

Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{1+x^2}y + xy^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: è un'equazione di Bernoulli, cioè un'equazione del tipo

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \tag{18}$$

con $\alpha \neq 0, 1$, che si risolve ponendo $z = y^{1-\alpha}$ e ottenendo un'equazione lineare del primo ordine in z . Infatti, supponendo $y(x) \neq 0$ e dividendo ambo i membri di (18) per y^α , si ottiene

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dx} y^{1-\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x),$$

e quindi $z = y^{1-\alpha}$ è soluzione dell'equazione

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x).$$

Nel nostro caso, posto $z(x) = 1/y^2(x)$, si ottiene (si noti che necessariamente $y(x) \neq 0$ in un intorno di $x = 0$ e che il problema ha soluzione unica, almeno localmente)

$$y^{-3}y' = \frac{2x}{1+x^2}y^{-2} + x \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}z' = \frac{2x}{1+x^2}z + x.$$

Quindi z risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -\frac{4x}{1+x^2}z - 2x \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Riscritta l'equazione come

$$z' + \frac{4x}{1+x^2}z = -2x,$$

moltiplichiamo ambo i membri per

$$e^{2\ln(1+x^2)} = (1+x^2)^2$$

essendo $x \mapsto 2\ln(1+x^2)$ una primitiva di $x \mapsto 4x/(1+x^2)$. Si ottiene

$$\frac{d}{dx}[(1+x^2)^2 z(x)] = -2x(1+x^2)^2,$$

che integrata tra $x_0 = 0$ ed un generico punto x fornisce

$$(1+x^2)^2 z(x) - 1 = -\int_0^x 2t(1+t^2)^2 dt = -\frac{1}{3}(1+t^2)^3 \Big|_0^x = \frac{1}{3}[1 - (1+x^2)^3],$$

e quindi

$$z(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(1+x^2)^2} - 1 - x^2 \right] = \frac{4}{3(1+x^2)^2} - \frac{1+x^2}{3}.$$

Poiché $y(x) \geq 0$ in un intorno di $x = 0$, vale

$$y(x) = \left(\sqrt{\frac{4}{3(1+x^2)^2} - \frac{1+x^2}{3}} \right)^{-1} = \sqrt{3} \frac{1+x^2}{\sqrt{4 - (1+x^2)^3}}.$$

Si noti che la soluzione esiste per

$$4 - (1+x^2)^3 > 0$$

cioè per $|x| < \sqrt[3]{4-1}$, e quindi è definita solo localmente, in un intorno di $x_0 = 0$.

1.6 Esercizi

1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases} \quad (*)$$

dove $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che

$$f(x, y) \leq 0 \quad \text{per } y > 0, \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{per } y < 0.$$

1. Provare che la costante nulla è soluzione di (*).
 2. Provare che la soluzione massimale di (*) è definita su $[\alpha, +\infty[$.
 3. Trovando esplicitamente una soluzione di (*) nel caso che sia $f(x, y) = -e^x y^3$, dire per quali coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il problema (*) ha, con tale f , una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.
2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x \sin(xy) - 2y [\cos(xy) + 2] \\ y' = \cos(xy) - y \sin(xy) + 2. \end{cases}$$

1. Si calcoli un integrale primo $E = E(x, y)$ tale che $E(0, 1) = 3e$ (sugg.: si cerchi un fattore integrante λ tale che $\partial_x \lambda = \lambda$).
2. Si provi che l'equazione $E(x, y) = 3e$ definisce implicitamente in un intorno di $x = 0$ una funzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = 1$.
3. Si provi che la funzione $y = y(x)$ è strettamente crescente in un intorno di $x = 0$.

N.B: non è richiesto il calcolo esplicito di E .

3. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x(y^2 - \ln x)}, \quad x > 0,$$

se ne scriva l'integrale generale in forma implicita.

4. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y(1 + xy)}{x},$$

se ne scriva l'integrale generale.

5. Si determini un integrale primo del sistema autonomo del secondo ordine

$$\begin{cases} x'' = \frac{e^{\arctan(x+y^3)}}{1 + (x + y^3)^2} \\ y'' = 3y^2 \frac{e^{\arctan(x+y^3)}}{1 + (x + y^3)^2}. \end{cases} \quad (**)$$

Successivamente, si dimostri che se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono soluzioni, allora x' e y' sono limitate e se ne deduca che un problema di Cauchy associato a (***) ha soluzione massimale definita su tutta la retta reale.

6. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} y' = x(1 - y^2) \\ y(0) = 0, \end{cases} & b) \begin{cases} yy' = x(4 - y^2) \\ y(0) = \sqrt{3}, \end{cases} \\ c) \begin{cases} y' = y(1 - y^2) \\ y(0) = 1/2, \end{cases} & d) \begin{cases} y' = 2x\sqrt{1 + y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases} \end{array}$$

indicando anche gli intervalli massimali di esistenza.

7. Sia $y = y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \sin x, & x > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0. \end{cases}$$

Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)/x^2$.

8. Si consideri l'equazione differenziale (di Bernoulli)

$$y' = -\frac{y + y^{1/2}}{1 + x^2}.$$

Per ogni $\alpha > 0$ si trovi la soluzione locale che soddisfa a $y(0) = \alpha$. Denominata y_α tale soluzione, si determinino i valori di α per i quali esiste un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $y_\alpha(\bar{x}) = 0$.

2 Sistemi lineari del primo ordine

Sia dato un sistema lineare omogeneo del primo ordine di n equazioni

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (19)$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice $n \times n$ con $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Il teorema di esistenza e unicità globale assicura l'esistenza della soluzione di un problema di Cauchy per (19) definita su tutto l'intervallo I . Ci occupiamo ora di studiare l'insieme delle soluzioni di (19). Innanzitutto vale il seguente

Lemma 2 *L'insieme delle soluzioni di (19) è uno spazio vettoriale.*

Dim. Siano $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ soluzioni di (19) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{y}(t) = \alpha\mathbf{y}_1(t) + \beta\mathbf{y}_2(t)$, $T \in I$. Dobbiamo provare che $\mathbf{y}$ è anch'essa soluzione di (19). Si ha

$$\mathbf{y}'(t) = \alpha\mathbf{y}'_1(t) + \beta\mathbf{y}'_2(t) = \alpha A(t)\mathbf{y}_1(t) + \beta A(t)\mathbf{y}_2(t) = A(t)\mathbf{y}(t),$$

e quindi $\mathbf{y}$ è soluzione di (19), come si voleva. □

Ricordiamo che, date $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p$ soluzioni di (19), queste si dicono linearmente indipendenti se, fissati $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + \alpha_p \mathbf{y}_p(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

A questo punto, per stabilire come è fatto l'integrale generale di (19), dobbiamo stabilire la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni e trovarne una base. Innanzitutto, dimostriamo il seguente

Lemma 3 *Si consideri il sistema (19). Fissato $t_0 \in I$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, se $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p$ sono soluzioni di (19), allora*

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1(t_0) + \dots + \alpha_p \mathbf{y}_p(t_0) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + \alpha_p \mathbf{y}_p(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in I.$$

Dim. La parte $\Leftarrow$ della dimostrazione è banale ed è omessa. Sia

$$\mathbf{z}(t) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + \alpha_p \mathbf{y}_p(t), \quad t \in I.$$

Allora $\mathbf{z}$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = A(t) \mathbf{z} \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Poiché $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ risolve lo stesso problema di Cauchy, per il teorema di unicità si ha $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$, come si voleva. $\square$

Il prossimo teorema definisce la struttura dello spazio delle soluzioni di (19). La sua dimostrazione fornisce un metodo per la costruzione di una base di soluzioni.

Teorema 3 *Lo spazio vettoriale delle soluzioni di (19) ha dimensione n .*

Dim. Sia $\mathbf{y}_k$, $k = 1, \dots, n$, soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{y}'_k = A(t) \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_k(t_0) = \mathbf{e}_k, \end{cases}$$

con $t_0 \in I$ fissato. Allora, essendo $\mathbf{y}_1(t_0), \dots, \mathbf{y}_n(t_0)$ vettori linearmente indipendenti, il lemma 3 assicura che $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ sono linearmente indipendenti. Per provare che costituiscono una base di soluzioni, fissiamo $\mathbf{y}$ soluzione di (19). Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\mathbf{y}(t_0) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t_0) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n(t_0).$$

Ma allora, sempre il lemma 3, vale

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n(t) \quad \forall t \in I,$$

e quindi $\mathbf{y}$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Data l'arbitrarietà di $\mathbf{y}$, si conclude che $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ sono una base dello spazio delle soluzioni di (19). $\square$

Una *matrice wronskiana* o *risolvente* per (19) in I è una matrice $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$, $t \in I$, le cui colonne sono una base di soluzioni per (19). Data una matrice wronskiana $\mathbf{W}$, l'integrale generale di (19) si scrive

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

Essendo le colonne di $\mathbf{W}(t)$ soluzioni di (19), si dimostra facilmente che $\mathbf{W}$ è soluzione dell'equazione matriciale

$$\mathbf{W}'(t) = A(t) \mathbf{W}(t). \quad (20)$$

Detta

$$\text{tr } A(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$$

la traccia della matrice $A(t)$, il determinante di $\mathbf{W}(t)$, detto *determinante wronskiano* o semplicemente *wronskiano*, verifica il

Teorema 4 (di Liouville-Jacobi) *Sia $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ matrice wronskiana di (19) in un intervallo I . Allora, fissato $t_0 \in I$, vale*

$$\det \mathbf{W}(t) = \det \mathbf{W}(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds} \quad \forall t \in I.$$

In particolare, se $\det \mathbf{W}(t_0) \neq 0$, allora $\det \mathbf{W}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Esempio 4 Troviamo un sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

che abbia come matrice wronskiana

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

dicendo in quali intervalli di $\mathbb{R}$ ciò è possibile. Successivamente calcoliamo l'integrale generale del sistema e la soluzione che vale $(1, 1)$ per $t = 0$.

Poiché $\det \mathbf{W}(t) = 1 - t^2$, $\mathbf{W}$ è matrice risolvente di un sistema negli intervalli $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$, $] 1, +\infty[$. Essendo $\mathbf{W}'(t) = A(t)\mathbf{W}(t)$, si ha $A(t) = \mathbf{W}'(t)(\mathbf{W}(t))^{-1}$, e quindi

$$A(t) = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}.$$

Il sistema cercato si scrive

$$\begin{cases} x' = -\frac{t}{1-t^2}x + \frac{1}{1-t^2}y \\ y' = \frac{1}{1-t^2}x - \frac{t}{1-t^2}y, \end{cases}$$

e il suo integrale generale è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 t \\ y(t) = c_1 t + c_2. \end{cases}$$

Imponendo le condizioni $x(0) = y(0) = 1$, poiché $x(0) = c_1$ e $y(0) = c_2$, si trova che $c_1 = c_2 = 1$, e quindi la soluzione che per $t = 0$ vale $(1, 1)$ è

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = t + 1. \end{cases}$$

2.1 Sistemi lineari non omogenei

È noto che data l'equazione lineare non omogenea

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad (22)$$

con a, b funzioni continue in uno stesso intervallo I , l'integrale generale si scrive

$$y(t) = Ce^{\alpha(t)} + e^{\alpha(t)}K(t),$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante e le funzioni α, K soddisfano $\alpha'(t) = a(t)$ e $K'(t) = e^{-\alpha(t)}b(t)$. In particolare, detta $y' = a(t)y$ l'equazione omogenea associata a (22), si osserva che l'integrale generale di (22) è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata ($Ce^{\alpha(t)}$) e di una soluzione particolare della non omogenea ($e^{\alpha(t)}K(t)$). La cosa si generalizza ad un sistema non omogeneo

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad (23)$$

con $A(t)$ matrice $n \times n$ con coefficienti continui in un intervallo I , e $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua. L'integrale generale di (23) è esprimibile come somma dell'integrale generale del sistema omogeneo associato, $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, e di una soluzione particolare di (23). Infatti, date due soluzioni $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ di (23), $\mathbf{y} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato perché

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y}'_2 - \mathbf{y}'_1 = [A(t)\mathbf{y}_2 + \mathbf{b}(t)] - [A(t)\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}(t)] = A(t)(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) = A(t)\mathbf{y}.$$

Poiché l'integrale generale del sistema omogeneo associato è noto una volta nota una base di soluzioni (e quindi una sua matrice wronskiana), si presenta il problema di calcolare una soluzione particolare di (23).

Metodo della variazione delle costanti

Con le notazioni sopra introdotte, cerchiamo una soluzione particolare di (23) del tipo

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{u}(t),$$

con $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ matrice risolvente del sistema omogeneo associato in I e $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ da determinare. Affinché $\mathbf{v}$ sia soluzione deve valere

$$\mathbf{v}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}(t) \quad \forall t \in I,$$

e quindi

$$\mathbf{W}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t),$$

da cui, grazie a (20),

$$\mathbf{u}'(t) = (\mathbf{W}(t))^{-1} \mathbf{b}(t).$$

Fissato $t_0 \in I$, integrando si ottiene

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \mathbf{b}(s) ds + \mathbf{k},$$

con $\mathbf{k}$ arbitrario vettore costante. Prendendo $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, una soluzione particolare di (23) è data da

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_{t_0}^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \mathbf{b}(s) ds. \quad (24)$$

Esempio 5 Scriviamo l'integrale generale nell'intervallo $] -1, 1[$ del sistema

$$\begin{cases} x' = -\frac{t}{1-t^2}x + \frac{1}{1-t^2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{1-t^2}x - \frac{t}{1-t^2}y. \end{cases}$$

Grazie all'esempio 4, il sistema omogeneo associato ha matrice risolvete data da (21). Con il metodo della variazione delle costanti, una soluzione particolare si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{W}(t) \int_0^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t 1/(1-s^2) ds \\ -\int_0^t s/(1-s^2) ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2) \ln |(t+1)/(t-1)| \\ (1/2) \ln |t^2 - 1| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1/2) \ln |(t+1)/(t-1)| + (t/2) \ln |t^2 - 1| \\ (t/2) \ln |(t+1)/(t-1)| + (1/2) \ln |t^2 - 1| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora l'integrale generale cercato è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{t}{2} \ln |t^2 - 1| \\ y(t) = c_1 t + c_2 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{1}{2} \ln |t^2 - 1|. \end{cases}$$

Esempio 6 Dato il sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (t^2 + 1)/t^4 \end{pmatrix},$$

determiniamo la matrice dei coefficienti $A(t)$ e l'integrale generale in $]0, +\infty[$, sapendo che l'integrale generale del sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 t + c_2 \\ y(t) = c_1 - c_2 t. \end{cases}$$

L'integrale generale del sistema omogeneo associato si riscrive

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

risulta essere matrice risolvibile perché $\det \mathbf{W}(t) = -t^2 - 1 \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La matrice $A(t)$ è data da

$$A(t) = \mathbf{W}'(t)(\mathbf{W}(t))^{-1} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

Per calcolare una soluzione particolare, usiamo il metodo della variazione delle costanti e calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_1^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (s^2 + 1)/s^4 \end{pmatrix} ds &= \int_1^t \frac{1}{s^2 + 1} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (s^2 + 1)/s^4 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_1^t \begin{pmatrix} 1/s^4 \\ -1/s^3 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -1/(3s^3)|_1^t \\ 1/(2s^2)|_1^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 - 1/(3t^3) \\ 1/(2t^2) - 1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui poi si ricava una soluzione particolare

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 - 1/(3t^3) \\ 1/(2t^2) - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/3 + 1/(6t^2) - 1/2 \\ 1/3 - 1/(3t^3) - 1/(2t) + t/2 \end{pmatrix},$$

e quindi l'integrale generale

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = c_1 t + c_2 + \frac{t}{3} + \frac{1}{6t^2} - \frac{1}{2} \\ \tilde{y}(t) = c_1 - c_2 t + \frac{1}{3} - \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}. \end{cases}$$

2.2 Sistemi lineari a coefficienti costanti

Consideriamo ora un sistema lineare a coefficienti costanti,

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{25}$$

dove la matrice A è fissata e non dipende dalla variabile t , mentre $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è funzione continua in un intervallo I . Si osservi che un problema di Cauchy per il sistema (25) ammette sempre un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I , perché la funzione

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad (t, \mathbf{y}) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

è lipschitziana in $I \times \mathbb{R}^n$ rispetto alla variabile $\mathbf{y}$. Per calcolare l'integrale generale di (25) è necessario procurarsi innanzitutto una base di soluzioni del sistema omogeneo associato,

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \quad (26)$$

Osserviamo che, dati $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ è soluzione di $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ se e solo se λ è autovalore di A con autovettore $\mathbf{v}$. Infatti vale

$$\mathbf{z}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad A\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}A\mathbf{v},$$

e quindi $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$ se e solo se $e^{\lambda t}(A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, che è equivalente a $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, come si voleva. Inoltre se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono autovettori di A linearmente indipendenti relativi agli autovalori λ_1, λ_2 , si ha che $\mathbf{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ sono soluzioni linearmente indipendenti. Infatti

$$\alpha_1\mathbf{z}_1(t) + \alpha_2\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{0} \iff (\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \iff \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = 0 \text{ e } \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0,$$

da cui otteniamo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, essendo $e^{\lambda t} \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Usando queste considerazioni, costruiamo una base di soluzioni di (26) considerando tre casi e stando attenti che cerchiamo soluzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ e non in $\mathbb{C}^n$.

1. *La matrice A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.* Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A , dove ciascun autovettore è ripetuto tante volte quanto è la sua molteplicità. Sia $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ una base di corrispondenti autovettori, cosicché vale $A\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora una base di soluzioni di (26) è data da

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad \varphi_n(t) = e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n,$$

$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono linearmente indipendenti essendo tali $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, e sono soluzioni di (26) per le considerazioni fatte in precedenza.

Esempio 7 Consideriamo il sistema lineare

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

La matrice ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con autovettori rispettivamente $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Una base di soluzioni è data dalle funzioni

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

Una matrice risolvente è

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale si scrive

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t - c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Esempio 8 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -6x - 4y, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e calcoliamone l'integrale generale. Gli autovalori della matrice che definisce il sistema sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con autovettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$. Una base di soluzioni è data dalle funzioni $\varphi_1(t) = (e^{2t}, -e^{2t})$ e $\varphi_2(t) = (e^{-t}, -2e^{-t})$. La corrispettiva matrice risolvente è

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale si scrive

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

2. La matrice A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A tale che $\text{Im } \lambda \neq 0$, e sia $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ il corrispettivo autovettore. Allora anche $\bar{\lambda}$, coniugato di λ è autovalore e un suo autovettore è $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, il vettore che ha per componenti i coniugati delle componenti di $\mathbf{v}$. Poiché

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \overline{\varphi(t)} = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}$$

sono soluzioni (linearmente indipendenti in $\mathbb{C}!$), data la linearità del sistema (26) sono soluzioni (linearmente indipendenti) anche

$$\text{Re}(e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Im}(e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{e^{\lambda t} \mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}}{2i},$$

che assumono valori in $\mathbb{R}^n$. Si noti che $\text{Re}(e^{\lambda t} \mathbf{v})$ è il vettore che ha per componenti le parti reali delle componenti di $e^{\lambda t} \mathbf{v}$, mentre $\text{Im}(e^{\lambda t} \mathbf{v})$ è il vettore che ha per componenti le parti immaginarie delle componenti di $e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Allora, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sono autovalori di A di relativi autovettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$,

- (a) per ogni autovalore reale di A , si procede come nel caso 1;
- (b) per ogni coppia di autovalori complessi coniugati λ_j e $\bar{\lambda}_j$ con parte immaginaria non nulla, si procede come sopra considerando la coppia di funzioni $\text{Re}(e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j)$ e $\text{Im}(e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j)$.

In questo modo si costruisce una base di soluzioni di (26) a valori in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 9 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = x - y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice che definisce il sistema ha autovalori complessi coniugati $\lambda = 1 \pm i$. L'autovettore relativo a $1 + i$ è $(2 + i, 1)$. Una base di soluzioni è fornita dalle parti reale ed immaginaria della funzione

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{(1+i)t}(2 + i, 1) = e^t e^{it}(2 + i, 1) = e^t(\cos t + i \sin t)(2 + i, 1) \\ &= \left(e^t[2 \cos t - \sin t + i(\cos t + 2 \sin t)], e^t(\cos t + i \sin t) \right).\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \varphi(t) &= \left(\operatorname{Re} \left(e^t[2 \cos t - \sin t + i(\cos t + 2 \sin t)] \right), \operatorname{Re} \left[e^t(\cos t + i \sin t) \right] \right) \\ &= \left(e^t(2 \cos t - \sin t), e^t \cos t \right), \\ \operatorname{Im} \varphi(t) &= \left(\operatorname{Im} \left(e^t[2 \cos t - \sin t + i(\cos t + 2 \sin t)] \right), \operatorname{Im} \left[e^t(\cos t + i \sin t) \right] \right) \\ &= \left(e^t(\cos t + 2 \sin t), e^t \sin t \right).\end{aligned}$$

Una matrice risolvante (reale) è

$$\begin{pmatrix} e^t(2 \cos t - \sin t) & e^t(\cos t + 2 \sin t) \\ e^t \cos t & e^t \sin t \end{pmatrix},$$

e l'integrale generale si scrive

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t(2 \cos t - \sin t) + c_2 e^t(\cos t + 2 \sin t) \\ y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t. \end{cases}$$

3. *La matrice A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ né in $\mathbb{C}$.* In questo caso il procedimento per cercare una base di soluzioni di (26) è piuttosto lungo. Limitiamoci a considerare sistemi 2×2 . Innanzitutto dimostriamo il seguente

Lemma 4 *Sia B matrice $n \times n$ tale che esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ non nullo per cui $\ker B = \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$ ¹. Allora esiste $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tale che $B\mathbf{w} = \mathbf{v}$.*

Dim. Se per assurdo fosse $B\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, si avrebbe $B\mathbf{w} \notin \ker B$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Allora $B(B\mathbf{w}) = B^2\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, da cui si deduce che $\ker B^2 = \{\mathbf{0}\}$, il che è assurdo perché almeno $\mathbf{v} \in \ker B^2$. $\square$

Sia allora $\lambda \in \mathbb{R}$ l'unico autovalore di A (se $\lambda \in \mathbb{C}$ la matrice sarebbe diagonalizzabile in $\mathbb{C}$), e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un generatore del corrispondente autospazio. Grazie alle considerazioni fatte precedentemente, un primo elemento della base di soluzioni di (26) è $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Denotata con $\mathbf{I}$ la matrice identica, l'altro elemento della base si ottiene scegliendo $\mathbf{w}$ in modo che $(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{v}$ e ponendo $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\lambda t}\mathbf{w}$. Si verifica facilmente (ed è lasciato al lettore) che φ_2 è effettivamente soluzione di (26) e che è linearmente indipendente da φ_1 . Si noti che $(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{v}$ ha soluzione per il lemma 4 perché $\ker(A - \lambda\mathbf{I}) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}\}$.

¹Si ricorda che $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è lo spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$

Esempio 10 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice che lo definisce ha come unico autovalore $\lambda = 3$ con autospazio generato dal vettore $\mathbf{v} = (1, 1)$. Un vettore $\mathbf{w} = (x, y)$ che soddisfi $(A - 3\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{v}$ deve verificare $x - y = 1$, e quindi si può prendere $\mathbf{w} = (1, 0)$. Una base di soluzioni è allora

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = te^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{3t} \\ y_1(t) = e^{3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = te^{3t} + e^{3t} \\ y_2(t) = te^{3t}. \end{cases}$$

La matrice wronskiana del sistema è

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} + e^{3t} \\ e^{3t} & te^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Si noti che $\det \mathbf{W}(t) = -e^{3t} \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, come ci si poteva aspettare. Se adesso vogliamo trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 4x - y + t \\ y' = x + 2y - t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \end{cases}$$

dobbiamo prima scrivere l'integrale generale del sistema non omogeneo. Per trovare una soluzione particolare calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} ds &= \int_0^t e^{-3s} \begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-3s} \begin{pmatrix} -s & s+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} ds = \int_0^t e^{-3s} \begin{pmatrix} -2s^2 - s \\ 2s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} [e^{-3t}(18t^2 + 21t + 7) - 7]/27 \\ 2[1 - e^{-3t}(3t + 1)]/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui si ricava come soluzione particolare

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [e^{-3t}(18t^2 + 21t + 7) - 7]/27 \\ 2[1 - e^{-3t}(3t + 1)]/9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18t^2 + 21t + 7 - 7e^{3t} \\ 6[e^{3t} - 3t - 1] \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6te^{3t} - e^{3t} - 3t + 1 \\ 6te^{3t} - 7e^{3t} + 15t + 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema non omogeneo è quindi

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = c_1 e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t} + \frac{1}{27}[6te^{3t} - e^{3t} - 3t + 1] \\ \tilde{y}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{1}{27}[te^{3t} - 7e^{3t} + 15t + 7] \end{cases}$$

Per calcolare la soluzione del problema di Cauchy, troviamo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\tilde{x}(0) = 1$, $\tilde{y}(0) = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ \tilde{y}(0) = c_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases},$$

e quindi la soluzione cercata è

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = (t+1)e^{3t} + \frac{1}{27}[6te^{3t} - e^{3t} - 3t + 1] \\ \tilde{y}(t) = te^{3t} + \frac{1}{27}[te^{3t} - 7e^{3t} + 15t + 7] \end{cases}.$$

2.3 Equazioni lineari di ordine $n \geq 1$

Un'equazione lineare di ordine n in forma normale è un'equazione differenziale del tipo

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \quad (27)$$

con $a_i, b \in \mathcal{C}^0(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Ricordiamo che una soluzione è una funzione $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte che soddisfa l'equazione in ogni $t \in I$. Posto

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \dots, \quad z_n = y^{(n-1)},$$

(27) è riconducibile al sistema lineare del primo ordine

$$\mathbf{z}' = A(t)\mathbf{z} + B(t), \quad (28)$$

dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Se ne deduce che un problema di Cauchy per (27) ammette sempre un'unica soluzione definita in tutto I .

Equazioni omogenee

Consideriamo l'equazione omogenea associata a (27),

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y. \quad (30)$$

Poiché questa è riconducibile al sistema lineare del primo ordine omogeneo $\mathbf{z}' = A(t)\mathbf{z}$ con $A(t)$ data da (29), dalle proprietà di tali sistemi si deduce che vale la seguente

Proposizione 4 *L'insieme delle soluzioni dell'equazione (30) è uno spazio vettoriale di dimensione n e n soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se $\det \mathbf{W}(t_0) \neq 0$ per qualche $t_0 \in I$ (e quindi per ogni $t \in I$).*

Una matrice wronskiana $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ per $\mathbf{z}' = A(t)\mathbf{z}$ è del tipo

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

perché φ è soluzione di (30) se $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ risolve il sistema lineare del primo ordine associato. Tale matrice si dice anche matrice wronskiana o risolvente per (30). A questo punto è chiaro che per poter risolvere (30) (e quindi anche (27)) e scriverne un integrale generale è necessario procurarsi una base di soluzioni. Data una base, l'integrale generale si esprime come combinazione lineare dei suoi elementi. Come per i sistemi lineari del primo ordine, ci limitiamo a costruire una base solo per equazioni a coefficienti costanti, e quindi d'ora in poi $a_0, \dots, a_{n-1}$ saranno costanti reali e (30) si scrive

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y. \quad (31)$$

Innanzitutto ci servono gli autovalori della matrice A definita in (29), dove risottolineiamo che consideriamo i suoi coefficienti a_i costanti. Per trovare gli autovalori è di aiuto il seguente risultato, che si dimostra per induzione su n .

Lemma 5 *Sia A come in (29), a coefficienti costanti. Allora l'equazione caratteristica*

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

si scrive

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0.$$

Sia ora $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A . È facile verificare che un autovettore è $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$ e che $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ risolve (30). Partendo da questa osservazione, per costruire una base di soluzioni di (31) distinguiamo vari casi.

1. λ è autovalore reale di molteplicità algebrica $p \geq 1$. Allora

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi_2(t) = te^{\lambda t}, \quad \dots, \quad \varphi_p(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}, \quad (32)$$

sono soluzioni linearmente indipendenti di (30).

2. λ è autovalore complesso con $\text{Im } \lambda \neq 0$ di molteplicità $p \geq 1$. Allora, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ definite come sopra sono soluzioni linearmente indipendenti, ma a valori in $\mathbb{C}$. Poiché anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di molteplicità p , $\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_p}$ sono anch'esse soluzioni linearmente indipendenti. Data la linearità di (31) si deduce che le $2p$ funzioni

$$\begin{aligned} \text{Re } \varphi_j(t) &= \frac{\varphi_j(t) + \overline{\varphi_j(t)}}{2} = t^{j-1} e^{(\text{Re } \lambda)t} \cos((\text{Im } \lambda)t), \\ \text{Im } \varphi_j(t) &= \frac{\varphi_j(t) - \overline{\varphi_j(t)}}{2i} = t^{j-1} e^{(\text{Re } \lambda)t} \sin((\text{Im } \lambda)t), \end{aligned} \quad j = 1, \dots, p, \quad (33)$$

sono ancora soluzioni e risultano essere linearmente indipendenti.

Allora, come per i sistemi lineari, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sono autovalori di A

1. per ogni autovalore reale di A di molteplicità $p \geq 1$, si procede come nel caso 1, costruendo le p funzioni in (32);
2. per ogni coppia di autovalori complessi coniugati λ e $\bar{\lambda}$ di molteplicità $p \geq 1$ e con parte immaginaria non nulla, si procede come sopra nel caso 2 costruendo le $2p$ funzioni in (33).

In questo modo si costruisce una base di soluzioni di (31) a valori in $\mathbb{R}$. Facciamo tre esempi per chiarire.

Esempio 11 Troviamo l'integrale generale dell'equazione del terzo ordine

$$y^{(3)} + y'' - 7y' - 15y = 0, \quad (y^{(3)} = -y'' + 7y' + 15).$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda - 15 = 0,$$

che ha radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$. Una base di soluzioni dell'equazione differenziale è quindi

$$\varphi_1(t) = e^{3t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-2t} \cos t, \quad \varphi_3(t) = e^{-2t} \sin t.$$

L'integrale generale si scrive

$$\tilde{y}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} \cos t + c_3 e^{-2t} \sin t. \quad (34)$$

Esempio 12 Consideriamo l'equazione del quarto ordine

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 13y'' - 36y' + 36y = 0, \quad (y^{(4)} = 4y^{(3)} - 13y'' + 36y' - 36y)$$

e troviamone l'integrale generale. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0,$$

che ha una radice reale, $\lambda = 2$, di molteplicità 2, e radici complesse coniugate $\pm 3i$. Una base di soluzioni dell'equazione differenziale è allora

$$\varphi_1(t) = e^{2t}, \quad \varphi_2(t) = te^{2t}, \quad \varphi_3(t) = \cos(3t), \quad \varphi_4(t) = \sin(3t),$$

e l'integrale generale

$$\tilde{y}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 \cos(3t) + c_4 \sin(3t).$$

La matrice wronskiana associata a questa base si scrive

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 2e^{2t} & e^{2t}(2t+1) & -3\sin(3t) & 3\cos(3t) \\ 4e^{2t} & e^{2t}(4t+4) & -9\cos(3t) & -9\sin(3t) \\ 8e^{2t} & e^{2t}(8t+12) & 27\sin(3t) & -27\cos(3t) \end{pmatrix},$$

e ci si può divertire a verificare che effettivamente $\det \mathbf{W}(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 13 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} = -32y'' - 256y \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^4 + 32\lambda^2 + 256 = (\lambda^2 + 16)^2 = 0,$$

che ha radici $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ entrambe di molteplicità 2. Una base di soluzioni dell'equazione differenziale è

$$\varphi_1(t) = \cos(4t), \quad \varphi_2(t) = \sin(4t), \quad \varphi_3(t) = t \cos(4t), \quad \varphi_4(t) = t \sin(4t),$$

e quindi l'integrale generale si scrive

$$\tilde{y}(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t) + c_3 t \cos(4t) + c_4 t \sin(4t).$$

Per risolvere il problema di Cauchy calcoliamo le derivate di $\tilde{y}$ fino all'ordine 3:

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) &= -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t) + c_3 [\cos(4t) - 4t \sin(4t)] + c_4 [\sin(4t) + 4t \cos(4t)] \\ \tilde{y}''(t) &= -16c_1 \cos(4t) - 16c_2 \sin(4t) - c_3 [8 \sin(4t) + 16t \cos(4t)] + \\ &\quad + c_4 [8 \cos(4t) - 16t \sin(4t)] \\ \tilde{y}^{(3)}(t) &= 64c_1 \sin(4t) - 64c_2 \cos(4t) - c_3 [48 \cos(4t) - 64t \sin(4t)] + \\ &\quad - c_4 [48 \sin(4t) + 64t \cos(4t)], \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\tilde{y}(0) = c_1, \quad \tilde{y}'(0) = 4c_2 + c_3, \quad \tilde{y}''(0) = -16c_1 + 8c_4, \quad \tilde{y}^{(3)}(0) = -64c_2 - 48c_3.$$

Allora c_1, c_2, c_3, c_4 devono risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 4c_2 + c_3 = 1 \\ -16c_1 + 8c_4 = 0 \\ -64c_2 - 48c_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_4 = 0 \\ c_3 = 1 - 4c_2 \\ -64c_2 - 48 + 192c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_4 = 0 \\ c_2 = 49/128 \\ c_3 = -17/32. \end{cases}$$

La soluzione cercata è quindi

$$\varphi(t) = \frac{49}{128} \sin(4t) - \frac{17}{32} t \cos(4t).$$

Equazioni non omogenee

Consideriamo l'equazione (27), dove assumiamo che i suoi coefficienti a_i siano costanti e che la funzione $b = b(t)$ sia definita continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$,

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + b(t). \quad (35)$$

Poiché essa è riconducibile al sistema lineare (28)-(29), il suo integrale generale è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, (30), e di una soluzione particolare. Per cercarne una applichiamo il metodo della variazione delle costanti al sistema (28)-(29). Innanzitutto, vale il seguente

Lemma 6 *Sia dato il sistema lineare $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, con A matrice a coefficienti costanti. Sia $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ matrice wronskiana in $\mathbb{R}$ per il sistema lineare tale che $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ matrice identica. Allora $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-s)\mathbf{W}(s)$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$.*

Dim. Definiamo la matrice $\widetilde{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}(t-s)\mathbf{W}(s)$. Essa soddisfa $\widetilde{\mathbf{W}}' = A\widetilde{\mathbf{W}}$ perché

$$\widetilde{\mathbf{W}}'(t) = \mathbf{W}'(t-s)\mathbf{W}(s) = A\mathbf{W}(t-s)\mathbf{W}(s) = A\widetilde{\mathbf{W}}(t).$$

Inoltre

$$\widetilde{\mathbf{W}}(s) = \mathbf{W}(0)\mathbf{W}(s) = \mathbf{I}\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}(s).$$

Se ne deduce $\widetilde{\mathbf{W}}$ soddisfa lo stesso sistema di equazioni differenziali lineari di $\mathbf{W}$ e coincide con quest'ultima in $t = s$. Per l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy si ha $\widetilde{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, come si voleva. $\square$

Si consideri ora una matrice wronskiana $\mathbf{W}$ per (31) tale che $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$. Questo equivale a prendere una base $\eta_1, \dots, \eta_n$ di soluzioni tali che $\eta_i^{(j)}(0) = \delta_{i,j+1}^2$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n-1$. Con il metodo della variazione delle costanti una soluzione particolare del sistema del primo ordine cui si riconduce (35) è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{W}(t) \int_{t_0}^t (\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds = \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t)(\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t-s)\mathbf{W}(s)(\mathbf{W}(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds = \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

²Si ricorda che il simbolo di Kronecker $\delta_{\ell,k}$ è definito da

$$\delta_{\ell,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell = k, \\ 0 & \text{se } \ell \neq k. \end{cases}$$

Poiché a noi interessa la prima componente di $\mathbf{v}$ (le altre sono le sue derivate fino all'ordine $n-1$), si ha che, posto $\eta(t) = \eta_n(t)$, una soluzione particolare è

$$v(t) = \int_{t_0}^t \eta(t-s)b(s) ds \quad t_0 \in I, \quad (36)$$

dove rimarchiamo che η risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Facciamo un esempio per chiarire la costruzione.

Esempio 14 Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(3)} + y'' - 7y' - 15y = \sin t. \quad (37)$$

L'equazione omogenea associata è la stessa dell'esempio 11 e quindi il suo integrale generale è dato da (34). La funzione η da inserire in (36) si ricava da (34), imponendo che $\tilde{y}(0) = \tilde{y}'(0) = 0$ e $\tilde{y}''(0) = 1$. Poiché

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) &= 3c_1e^{3t} - c_2e^{-2t}[2\cos t - \sin t] - c_3e^{-2t}[2\sin t + \cos t] \\ &= 3c_1e^{3t} - e^{-2t}[(2c_2 + c_3)\cos t + (2c_3 - c_2)\sin t] \\ \tilde{y}''(t) &= 9c_1e^{3t} + e^{-2t}[(4c_2 + 2c_3)\cos t + (4c_3 - 2c_2)\sin t + \\ &\quad - (2c_2 + c_3)\sin t + (2c_3 - c_2)\cos t] \\ &= 9c_1e^{3t} + e^{-2t}[(3c_2 + 4c_3)\cos t + (3c_3 - 4c_2)\sin t], \end{aligned}$$

si ha

$$\tilde{y}(0) = c_1 + c_2, \quad \tilde{y}'(0) = 3c_1 - 2c_2 - c_3, \quad \tilde{y}''(0) = 9c_1 + 3c_2 + 4c_3,$$

e quindi c_1, c_2, c_3 devono risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 - c_3 = 0 \\ 9c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_3 = 5c_1 \\ 26c_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1/26 \\ c_2 = -1/26 \\ c_3 = 5/26. \end{cases}$$

Allora

$$\eta(t) = \frac{1}{26}[e^{3t} - e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\sin t].$$

Una soluzione particolare dell'equazione è

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{26} \int_0^t [e^{3(t-s)} - e^{-2(t-s)}\cos(t-s) + 5e^{-2(t-s)}\sin(t-s)] \sin s ds \\ &= \frac{e^{3t}}{26} \int_0^t e^{-3s} \sin s ds + \frac{e^{-2t}}{26} \int_0^t e^{2s} [5\sin(t-s)\sin s - \cos(t-s)\sin s] ds. \end{aligned}$$

Poiché

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] , \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{e^{3t}}{26} \int_0^t e^{-3s} \sin s \, ds + \frac{e^{-2t}}{52} \int_0^t e^{2s} [5 \cos(t - 2s) - 5 \cos t - \sin t + \sin(t - 2s)] \, ds \\ &= \frac{(5 \cos t + \sin t)}{104} (e^{-2t} - 1) + \\ &\quad + \frac{e^{3t}}{26} \int_0^t e^{-3s} \sin s \, ds + \frac{e^{-2t}}{52} \int_0^t e^{2s} [5 \cos(t - 2s) + \sin(t - 2s)] \, ds . \end{aligned}$$

Dalle formule

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{as} \sin(bs) \, ds &= \frac{a}{a^2 + b^2} e^{at} \sin(bt) - \frac{b}{a^2 + b^2} [e^{at} \cos(bt) - 1] , \\ \int_0^t e^{as} \cos(bs) \, ds &= \frac{b}{a^2 + b^2} e^{at} \sin(bt) + \frac{a}{a^2 + b^2} [e^{at} \cos(bt) - 1] , \end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-3s} \sin s \, ds &= -\frac{3}{10} e^{-3t} \sin t - \frac{1}{10} [e^{-3t} \cos t - 1] , \\ \int_0^t e^{2s} \cos(t - 2s) \, ds &= \int_0^t e^{2s} \cos(2s - t) \, ds \stackrel{\tau=2s-t}{=} \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{t+\tau} \cos \tau \, d\tau \\ &= \frac{e^t}{2} \left[\int_0^t e^\tau \cos \tau \, d\tau - \int_0^{-t} e^\tau \cos \tau \, d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4} \sin t (e^{2t} + 1) + \frac{1}{4} \cos t (e^{2t} - 1) \\ \int_0^t e^{2s} \sin(t - 2s) \, ds &= - \int_0^t e^{2s} \sin(2s - t) \, ds \stackrel{\tau=2s-t}{=} \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{t+\tau} \sin \tau \, d\tau \\ &= \frac{e^t}{2} \left[\int_0^t e^\tau \sin \tau \, d\tau - \int_0^{-t} e^\tau \sin \tau \, d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4} \sin t (e^{2t} + 1) - \frac{1}{4} \cos t (e^{2t} - 1) . \end{aligned}$$

Alla fine si trova

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{(5 \cos t + \sin t)}{104} (e^{-2t} - 1) - \frac{3}{260} \sin t + \frac{1}{260} (e^{3t} - \cos t) + \frac{5}{208} \sin t (1 + e^{-2t}) + \\ &\quad + \frac{5}{208} \cos t (1 - e^{-2t}) + \frac{1}{208} \sin t (1 + e^{-2t}) - \frac{1}{208} \cos t (1 - e^{-2t}) , \end{aligned}$$

e quindi

$$v(x) = \frac{e^{3t}}{260} + \frac{3}{104}e^{-2t} \cos t + \frac{1}{26}e^{-2t} \sin t - \frac{17}{520} \cos t + \frac{1}{130} \sin t.$$

L'integrale generale cercato è

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} \cos t + c_3 e^{-2t} \sin t + \\ + \frac{e^{3t}}{260} + \frac{3}{104}e^{-2t} \cos t + \frac{1}{26}e^{-2t} \sin t - \frac{17}{520} \cos t + \frac{1}{130} \sin t. \end{aligned}$$

2.4 Metodo di simiglianza

È chiaro dall'esempio precedente che il metodo della variazione delle costanti è sì del tutto generale, ma molto costoso dal punto di vista computazionale. Cerchiamo ora un altro metodo: ripartendo dall'equazione (37) cerchiamo una soluzione particolare v che assomigli al termine noto, cioè cerchiamo v tra le funzioni del tipo

$$v(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t,$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono dei parametri. Dobbiamo determinare α e β in modo che v risolva (37). Calcoliamo allora le derivate di v fino al terzo ordine

$$v'(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t, \quad v''(t) = -\alpha \cos t - \beta \sin t, \quad v^{(3)}(t) = \alpha \sin t - \beta \cos t,$$

e sostituiamole in (37): si ottiene che deve valere

$$(8\alpha - 16\beta) \sin t - (8\beta + 16\alpha) \cos t = \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

da cui si ricava $\alpha = 1/40$ e $\beta = -1/20$. Quindi

$$v(x) = \frac{\cos t}{40} - \frac{\sin t}{20}$$

è soluzione particolare di (37). Questo metodo, detto metodo di simiglianza, consente di calcolare soluzioni di equazioni lineari a coefficienti costanti nel caso in cui il termine noto abbia una forma particolare. Adesso ci limiteremo a descriverlo accuratamente per equazioni lineari del secondo ordine,

$$ay'' + by' + cy = g(x), \quad a \neq 0, \quad (38)$$

ma è evidente dall'esempio appena fatto che è possibile generalizzarlo ad equazioni di ordine maggiore. Nel seguito indichiamo con $v = v(x)$ la soluzione particolare di (38) che si vuole calcolare. Distinguiamo 4 casi.

1. $g(x)$ è un polinomio di grado n . Allora si cerca v tra i polinomi

- (a) di grado n se $\lambda = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$;
- (b) di grado $n + 1$ se $\lambda = 0$ è radice dell'equazione caratteristica ($c = 0$).

Ad esempio, per

$$y'' - 5y' + 6y = x - 1$$

si può prendere $v(x) = \alpha x + \beta$. Imponendo che sia soluzione si ottiene che deve valere

$$-5\alpha + 6\alpha x + 6\beta = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1/6, \quad \beta = -1/36,$$

e quindi $v(x) = x/6 - 1/36$.

2. g è del tipo $g(x) = Ce^{\gamma x}$, con $\gamma \neq 0$. Allora si cerca v tra le funzioni del tipo

- (a) $v(x) = \alpha e^{\gamma x}$ se γ non è radice dell'equazione caratteristica;
- (b) $v(x) = \alpha x e^{\gamma x}$ se γ è radice di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica;
- (c) $v(x) = \alpha x^2 e^{\gamma x}$ se γ è radice di molteplicità 2 dell'equazione caratteristica,

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare. Ad esempio, per

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x},$$

essendo $\lambda = 3$ soluzione dell'equazione caratteristica, si prende $v(x) = \alpha x e^{3x}$, si impone che sia soluzione e si trova il valore di α . Si ottiene

$$v'(x) = \alpha e^{3x}(3x + 1), \quad v''(x) = \alpha e^{3x}(9x + 6), \quad v'' - 5v' + 6v = \alpha e^{3x},$$

e quindi $\alpha = 1$ e $v(x) = x e^{3x}$.

3. g è del tipo $g(x) = Ce^{\gamma x} \cos(\omega x)$ oppure $g(x) = Ce^{\gamma x} \sin(\omega x)$, $\omega \neq 0$. Allora

- (a) se $\lambda = \gamma + i\omega$ non è radice dell'equazione caratteristica, si cerca v tra le funzioni del tipo

$$v(x) = e^{\gamma x} [\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

- (b) se $\lambda = \gamma + i\omega$ è radice dell'equazione caratteristica, si cerca v tra le funzioni del tipo

$$v(x) = x e^{\gamma x} [\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

poi si determinano i parametri α e β in modo che v sia soluzione. Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$y'' + y = \cos x.$$

Poiché $\lambda = i$ è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$v(x) = x(\alpha \cos x + \beta \sin x).$$

Poiché

$$v'(x) = (\alpha + \beta x) \cos x + (\beta - \alpha x) \sin x,$$

$$v''(x) = (2\beta - \alpha x) \cos x - (2\alpha + \beta x) \sin x,$$

imponendo che v sia soluzione si ottiene

$$2\beta \cos x - 2\alpha \sin x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 1/2, \quad \alpha = 0,$$

e quindi la soluzione cercata è $v(x) = (x \sin x)/2$.

4. $g(x)$ è la somma di due funzioni $g_1(x)$ e $g_2(x)$ con g_1 e g_2 che ricadono nei casi precedenti. Allora si trovano $v_1(x)$ e $v_2(x)$ relative a g_1 e g_2 e poi si pone $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$: si dimostra facilmente che v è soluzione particolare sfruttando la linearità dell'equazione. Ad esempio, considerando l'equazione

$$y'' - 5y' + 6y = e^x + x,$$

si trovano v_1 e v_2 che soddisfano rispettivamente

$$y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad y'' - 5y' + 6y = x.$$

Quindi si cercano v_1 e v_2 tra le funzioni del tipo $v_1(x) = \alpha e^x$ e $v_2(x) = \mu x + \lambda$. Imponendo che siano soluzioni si trova che devono valere $\alpha = 1/2$, $\mu = 1/6$ e $\lambda = 5/36$. Allora $v_1(x) = e^x/2$ e $v_2(x) = x/6 + 5/36$ e quindi

$$v(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$$

è soluzione particolare dell'equazione data.

2.5 Esercizi svolti

Presentiamo alcuni esercizi svolti su equazioni e sistemi lineari.

Esercizio 1 Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \sin x \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione nel caso $\alpha = \beta = 0$.
2. Dire se esistono α, β tali da rendere la soluzione periodica, non costante.

Svolgimento. L'equazione è lineare a coefficienti costanti con termine noto di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto l'asse reale e quindi la soluzione del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$. Scriviamo l'integrale generale dell'equazione. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha una sola radice $\lambda = -1$ di molteplicità 2. L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}. \quad (39)$$

Per la soluzione particolare, con il metodo di simiglianza si cerca v del tipo

$$v(x) = a \sin x + b \cos x,$$

e si vede subito che deve essere $a = 0$ e $b = 1/2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\tilde{u}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{\cos x}{2}.$$

Per la soluzione del problema di Cauchy

$$\tilde{u}(0) = c_1 + \frac{1}{2}$$

$$\tilde{u}'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}(1-x) - \frac{\sin x}{2} \quad \implies \quad \tilde{u}'(0) = -c_1 + c_2,$$

e si ricava $c_1 = c_2 = -1/2$, e quindi la soluzione cercata è

$$u(x) = -\frac{e^{-x} + x e^{-x} - \cos x}{2}.$$

Per la seconda parte, bisogna trovare α, β tali che $c_1 = c_2 = 0$: l'unica soluzione periodica è $v(x) = \cos x/2$, che corrisponde a $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$.

Volendo trovare una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti, bisogna ripartire dall'integrale generale (39) e tra queste soluzioni cercare quella che soddisfa $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$ in modo da poter poi calcolare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Si trova

$$u(0) = c_1, \quad u'(0) = -c_1 + c_2,$$

da cui si ricava $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Una soluzione particolare è quindi

$$v(x) = \int_0^x (x-t) e^{t-x} \sin t \, dt = x e^{-x} \int_0^x e^t \sin t \, dt - e^{-x} \int_0^x t e^t \sin t \, dt$$

Calcoliamo i due integrali.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \sin t \, dt &= e^t \sin t \Big|_0^x - \int_0^x e^t \cos t \, dt = e^x \sin x - \left[e^t \cos t \Big|_0^x + \int_0^x e^t \sin t \, dt \right] \\ &= 1 + e^x (\sin x - \cos x) - \int_0^x e^t \sin t \, dt, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\int_0^x e^t \sin t \, dt = \frac{1 + e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$$

Per il secondo integrale si ha

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^t \sin t \, dt &= t e^t \sin t \Big|_0^x - \int_0^x e^t [\sin t + t \cos t] \, dt \\ &= x e^x \sin x - \frac{1 + e^x (\sin x - \cos x)}{2} - \left[t e^t \cos t \Big|_0^x - \int_0^x e^t [\cos t - t \sin t] \, dt \right] \\ &= x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1 + e^x (\sin x - \cos x)}{2} + \\ &\quad + \int_0^x e^t \cos t \, dt - \int_0^x t e^t \sin t \, dt. \end{aligned}$$

Poiché

$$\int_0^x e^t \cos t \, dt = e^x \sin x - \int_0^x e^t \sin t \, dt = e^x \sin x - \frac{1 + e^x (\sin x - \cos x)}{2},$$

si ricava

$$\int_0^x t e^t \sin t \, dt = \frac{x e^x (\sin x - \cos x) + e^x \cos x - 1}{2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{x e^{-x} + x (\sin x - \cos x)}{2} - \frac{x (\sin x - \cos x) + \cos x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{-x}(x+1) - \cos x}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$y^{(3)} - \alpha y' = \sin x$$

ammette almeno una soluzione u tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$.

Svolgimento. L'equazione è lineare con termine noto $\mathcal{C}^\infty$ e pertanto ha soluzioni definite su tutto l'asse reale. L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - \alpha \lambda = 0$ e le sue soluzioni sono

1. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha}$, se $\alpha \geq 0$;
2. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{|\alpha|}i$, se $\alpha < 0$.

Distinguiamo allora i due casi, rinunciando a discutere il caso con $\alpha = 0$ che è banale e lasciato al lettore.

1. $\alpha > 0$. L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $v(x) = A \cos x + B \sin x$. Si ha

$$v'(x) = -A \sin x + B \cos x, \quad v''(x) = -A \cos x - B \sin x, \quad v^{(3)} = A \sin x - B \cos x.$$

Imponendo che v sia soluzione si trova $A = 1/(1 + \alpha)$ e $B = 0$. Quindi l'integrale generale è

$$\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{\cos x}{1 + \alpha}.$$

Affinché $\tilde{y}(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, basta che sia $\alpha \neq 0$ e $c_3 < 0$.

2. $\alpha < 0$. L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|x}) + c_3 \sin(\sqrt{|\alpha|x}).$$

Per scrivere una soluzione particolare, potremmo usare ancora il metodo di simiglianza³ e dedurre immediatamente che non esistono soluzioni che tendono a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

Lasciamo tutto questo al lettore e invece procediamo con il metodo della variazione delle

³Attenzione al caso $\alpha = -1$ per cui è necessario scegliere v del tipo $v(x) = x[A \cos x + B \sin x]$.

costanti cercando la soluzione dell'equazione omogenea associata che soddisfi $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$. Si ha

$$y(0) = c_1 + c_2, \quad y'(0) = c_3 \sqrt{|\alpha|}, \quad y''(0) = -c_2 \alpha^2,$$

e quindi $c_1 = 1/\alpha^2$, $c_2 = -1/\alpha^2$, $c_3 = 0$. Una soluzione particolare è

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x [1 - \cos(\sqrt{|\alpha|}(x-t))] \sin t \, dt = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \sin t \, dt + \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \cos(\sqrt{|\alpha|}(x-t)) \sin t \, dt \\ &= \frac{1 - \cos x}{\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^x [\sin(\sqrt{|\alpha|}(x-t) + t) - \sin(\sqrt{|\alpha|}(x-t) - t)] \, dt \end{aligned}$$

Distinguiamo altri due casi.

(a) $\alpha \neq -1$. Si ha

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1 - \cos x}{\alpha^2} + \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^x [\sin(\sqrt{|\alpha|x} + (1 - \sqrt{|\alpha|})t) - \sin(\sqrt{|\alpha|x} - (1 + \sqrt{|\alpha|})t)] \, dt \\ &= \frac{1 - \cos x}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^2(1 - \sqrt{|\alpha|})} [\cos x - \cos(\sqrt{|\alpha|x})] + \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha^2(1 + \sqrt{|\alpha|})} [\cos x - \cos(\sqrt{|\alpha|x})] \\ &= \frac{1 - \cos x}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2(1 + \alpha)} [\cos x - \cos(\sqrt{|\alpha|x})]. \end{aligned}$$

L'integrale generale è

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= c_1 + c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|x}) + c_3 \sin(\sqrt{|\alpha|x}) + \\ &\quad + \frac{1 - \cos x}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2(1 + \alpha)} [\cos x - \cos(\sqrt{|\alpha|x})], \end{aligned}$$

e quindi nessuna soluzione tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

(b) $\alpha = -1$. Si ha

$$v(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2} \int_0^x [\sin x - \sin(x-2t)] \, dt = 1 - \cos x - \frac{x \sin x}{2}.$$

L'integrale generale è

$$\tilde{y}(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + 1 - \cos x - \frac{x \sin x}{2},$$

ed anche in questo caso nessuna soluzione tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

Esercizio 3 Trovare l'integrale generale del sistema lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = x - 2y - 2z \\ y' = x + z \\ z' = x + y. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice che definisce il sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0$ si scrive

$$(\lambda + 1)[(\lambda - 1)^2 + 4] = 0.$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ e quindi A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$. L'autospazio relativo a $\lambda_1 = -1$ è generato da $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1)$, mentre quello relativo a $\lambda_2 = 1 + 2i$ è generato da $\mathbf{v}_2 = (2i, 1, 1) \in \mathbb{C}^3$. Una base di soluzioni è allora

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-t} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(t) &= \operatorname{Re}(e^{(1+2i)t} \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(2ie^t e^{2it}) \\ \operatorname{Re}(e^t e^{2it}) \\ \operatorname{Re}(e^t e^{2it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}, \\ \varphi_3(t) &= \operatorname{Im}(e^{(1+2i)t} \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(2ie^t e^{2it}) \\ \operatorname{Im}(e^t e^{2it}) \\ \operatorname{Im}(e^t e^{2it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) \\ e^t \sin(2t) \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e l'integrale generale si scrive

$$\begin{cases} x(t) = -2c_2 e^t \sin(2t) + 2c_3 e^t \cos(2t) \\ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \cos(2t) + c_3 e^t \sin(2t) \\ z(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \cos(2t) + c_3 e^t \sin(2t), \end{cases} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4 Trovare l'integrale generale nell'intervallo $]0, +\infty[$ del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y \\ t^2 y' = 2x + ty. \end{cases}$$

Svolgimento. Osserviamo che il sistema è lineare con coefficienti continui in $]0, +\infty[$, potendo essere riscritto come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e quindi un problema di Cauchy ha soluzione definita in tutto $]0, +\infty[$. Tale soluzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Infatti, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono almeno di classe $\mathcal{C}^2$, perché x' e y' sono somme di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$. Allora, essendo $x(t)$ e $y(t)$ di classe $\mathcal{C}^2$, tali sono anche x' e y' perché somme di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$, e quindi $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe $\mathcal{C}^3$. Procedendo per induzione si ottiene che $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$. Per calcolare l'integrale generale del sistema, deriviamo la seconda equazione rispetto a t , cosa che possiamo fare per la precedente discussione sulla regolarità delle soluzioni. Si ottiene

$$2ty' + t^2y'' = 2x' + y + ty'.$$

Sfruttando la prima equazione si deduce che la componente y della soluzione deve soddisfare

$$t^2y'' + ty' - 3y = 0.$$

Cerchiamo soluzioni del tipo $y(t) = t^\alpha$: sostituendo nell'equazione si trova che deve valere

$$t^\alpha(\alpha^2 - 3) = 0 \quad \forall t > 0,$$

e quindi $\alpha = \pm\sqrt{3}$ e

$$y(t) = c_1 t^{\sqrt{3}} + c_2 t^{-\sqrt{3}}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sempre dalla seconda equazione, si ricava che

$$x = \frac{1}{2}(t^2y' - ty)$$

e quindi la componente x di una soluzione soddisfa

$$x(t) = c_1 \frac{t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + c_2 \frac{t^{1-\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}.$$

Poiché l'insieme delle soluzioni del sistema è uno spazio vettoriale di dimensione 2, si deduce che l'integrale generale è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \frac{t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + c_2 \frac{t^{1-\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}} \\ y(t) = c_1 t^{\sqrt{3}} + c_2 t^{-\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Esercizio 5 Trovare l'integrale generale nella semiretta $]0, +\infty[$ del sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ty + 2t \\ ty' = x - y. \end{cases}$$

Trovare poi la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(1) = y(1) = 0$.

Svolgimento. Per trovare una base di soluzioni del sistema lineare associato

$$\begin{cases} x' = ty \\ ty' = x - y, \end{cases} \quad (40)$$

procediamo come nell'esercizio precedente, perché la regolarità delle soluzioni anche in questo caso è necessariamente $\mathcal{C}^\infty$: deriviamo la prima equazione ottenendo

$$x'' = y + ty',$$

e sfruttiamo la seconda per esprimere ty' . Si ottiene che x deve soddisfare l'equazione

$$x'' = x,$$

di cui

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

è l'integrale generale. Per trovare la componente y dell'integrale generale, usiamo queste informazioni nella seconda equazione⁴, ottenendo che dobbiamo risolvere

$$ty' = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(ty) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{c}{t},$$

con $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$y(t) = c_1 \frac{e^t}{t} - c_2 \frac{e^{-t}}{t} + \frac{c}{t}.$$

Imponendo che le componenti $x = x(t)$ e $y = y(t)$ trovate siano effettivamente soluzione di (40), si ottiene che deve essere $c = 0$, e quindi una base di soluzioni in $]0, +\infty[$ del sistema omogeneo associato è

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t/t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t}/t \end{pmatrix}.$$

Per trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo, procediamo nello stesso modo, invitando il lettore ad applicare il metodo della variazione delle costanti. Si trova che la componente x deve soddisfare

$$x'' = x + 2,$$

di cui $x = -2$ è soluzione particolare. In corrispondenza di questa la componente y soddisfa

$$\begin{cases} ty' = -2 - y, \\ ty + 2t = 0, \end{cases}$$

dove la seconda equazione deve valere perché $x' = 0$. Allora $y = -2$ è soluzione particolare, e quindi l'integrale generale del sistema non omogeneo è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2 \\ y(t) = c_1 \frac{e^t}{t} - c_2 \frac{e^{-t}}{t} - 2, \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

⁴Si potrebbe usare anche la prima equazione, ricavando direttamente y , ma preferiamo procedere in un altro modo per evidenziare un punto critico di questo metodo.

Poiché $x(1) = c_1 e + c_2/e - 2$ e $y(1) = c_1 e - c_2/e - 2$, affinché $x(1) = y(1) = 0$ deve essere $c_1 = 2/e$ e $c_2 = 0$. La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{t-1} - 2 \\ y(t) = 2\frac{e^{t-1}}{t} - 2. \end{cases}$$

2.6 Esercizi

1. Si scrivano gli integrali generali dei seguenti sistemi di equazioni differenziali, calcolando una eventuale soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti:

$$a) \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y - 2, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = 3x - y + t \\ y' = 5x - y, \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - t, \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x' = x + y + t + 2 \\ y' = x + y + te^{2t}, \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = -x + t - 1, \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x \\ z' = y, \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x' = -3z \\ y' = x + 2z \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

2. Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^t \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si provi che essa è una matrice wronskiana su tutto $\mathbb{R}$ di un sistema lineare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

di cui si chiede di determinare la matrice $A(t)$. Successivamente si scriva l'integrale generale del sistema non omogeneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & -t & t \end{pmatrix}.$$

Si trovino gli intervalli dove essa è una matrice wronskiana di un sistema lineare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

di cui si chiede di determinare la matrice $A(t)$. Successivamente si scriva l'integrale generale del sistema non omogeneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

4. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} u'' + 2u' - 3u = -e^{-3x} \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -2, \end{cases} & b) \begin{cases} u'' + 2u' + u = xe^{-x} \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = -0, \end{cases} \\ c) \begin{cases} u'' - 2u' + u = 5 \\ u(0) = 2, \quad u'(0) = -1, \end{cases} & d) \begin{cases} u'' + 2u' + 2u = \sin(2x) \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = -0. \end{cases} \end{array}$$

5. Si scrivano gli integrali generali delle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{array}{ll} a) y^{(4)} - y'' = \sin x + x, & b) y^{(3)} - y'' + y' - y = e^x, \\ c) y^{(4)} - 2y'' + y = e^x, & d) y^{(3)} - 8y = x^2 + 2 \sin x. \end{array}$$

6. Si provi che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$ l'equazione differenziale

$$y^{(4)} - \omega y = 0$$

ha almeno una soluzione tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

7. Determinare $k > 0$ in modo che il problema

$$\begin{cases} u^{(3)}(x) - u''(x) - (k-1)u'(x) + (k-1)u(x) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

abbia soluzioni periodiche non costanti. Determinare tali soluzioni in funzione di k e trovarne il periodo.