

Curve e forme differenziali

Baricentro di una curva

Sia data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$. Assumiamo che sia assegnata una funzione continua e positiva $\mu : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, che chiamiamo densità di γ . Allora il baricentro di γ è il punto $(x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{R}^3$ le cui coordinate sono individuate da

$$x_B \doteq \frac{\int_{\gamma} x \mu \, ds}{\int_{\gamma} \mu \, ds} = \frac{\int_a^b \gamma_1(t) \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}{\int_a^b \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}, \quad (1)$$

$$y_B \doteq \frac{\int_{\gamma} y \mu \, ds}{\int_{\gamma} \mu \, ds} = \frac{\int_a^b \gamma_2(t) \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}{\int_a^b \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}, \quad (2)$$

$$z_B \doteq \frac{\int_{\gamma} z \mu \, ds}{\int_{\gamma} \mu \, ds} = \frac{\int_a^b \gamma_3(t) \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}{\int_a^b \mu(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt}. \quad (3)$$

Se $t \mapsto \mu(\gamma(t))$ è funzione costante e vale $\mu(\gamma(t)) = \mu > 0$ per ogni $t \in [a, b]$, allora (1)-(3) si riducono a

$$x_B = \frac{\int_a^b \gamma_1(t) \|\gamma'(t)\| \, dt}{L(\gamma)}, \quad y_B = \frac{\int_a^b \gamma_2(t) \|\gamma'(t)\| \, dt}{L(\gamma)}, \quad z_B = \frac{\int_a^b \gamma_3(t) \|\gamma'(t)\| \, dt}{L(\gamma)}, \quad (4)$$

dove

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

è la lunghezza della curva. Il punto con queste coordinate si dice anche *centroide* della curva γ .

Esempio 1 Calcoliamo il baricentro della curva la cui equazione in coordinate polari è $\rho = e^{k\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, con $k \neq 0$. Le equazioni parametriche della curva sono

$$\begin{cases} x = e^{k\varphi} \cos \varphi, \\ y = e^{k\varphi} \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi],$$

e quindi si tratta di un ramo di spirale logaritmica la cui parametrizzazione è data da

$$\gamma(\varphi) = e^{k\varphi} (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Calcoliamo la lunghezza di γ . Poiché

$$\gamma'(\varphi) = e^{k\varphi} (k \cos \varphi - \sin \varphi, k \sin \varphi + \cos \varphi),$$

si ha

$$\|\gamma'(\varphi)\| = e^{k\varphi} \sqrt{k^2 + 1},$$

e quindi

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi = \sqrt{k^2 + 1} \int_0^\pi e^{k\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{k\pi} - 1).$$

L'ascissa del baricentro è

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{L(\gamma)} \cdot \int_\gamma x ds = \frac{k}{(e^{k\pi} - 1)\sqrt{k^2 + 1}} \int_0^\pi e^{k\varphi} (\cos \varphi) e^{k\varphi} \sqrt{k^2 + 1} d\varphi \\ &= \frac{k}{e^{k\pi} - 1} \int_0^\pi e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, procediamo per parti: si ottiene

$$\begin{aligned} I &\doteq \int_0^\pi e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = e^{2k\varphi} \sin \varphi \Big|_0^\pi - 2k \int_0^\pi e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi \\ &= 2k \left[e^{2k\varphi} \cos \varphi \Big|_0^\pi - 2k \int_0^\pi e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi \right] \\ &= -2k(e^{2k\pi} + 1) - 4k^2 I, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\int_0^\pi e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = -2k \frac{e^{2k\pi} + 1}{4k^2 + 1},$$

e quindi

$$x_B = -\frac{2k^2}{4k^2 + 1} \cdot \frac{e^{2k\pi} + 1}{e^{k\pi} - 1}.$$

Quanto all'ordinata del baricentro, si ha

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{1}{L(\gamma)} \cdot \int_\gamma y ds = \frac{k}{(e^{k\pi} - 1)\sqrt{k^2 + 1}} \int_0^\pi e^{k\varphi} (\sin \varphi) e^{k\varphi} \sqrt{k^2 + 1} d\varphi \\ &= \frac{k}{e^{k\pi} - 1} \int_0^\pi e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Procedendo come sopra si ricava

$$\begin{aligned} J &\doteq \int_0^\pi e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi = -e^{2k\varphi} \cos \varphi \Big|_0^\pi + 2k \int_0^\pi e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi \\ &= e^{2k\pi} + 1 + 2k \left[e^{2k\varphi} \sin \varphi \Big|_0^\pi - 2k \int_0^\pi e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= e^{2k\pi} + 1 - 4k^2 J, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\int_0^\pi e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{e^{2k\pi} + 1}{4k^2 + 1},$$

e quindi

$$y_B = \frac{k}{4k^2 + 1} \cdot \frac{e^{2k\pi} + 1}{e^{k\pi} - 1}.$$

Insiemi semplicemente connessi

Ricordiamo che un circuito è una curva chiusa.

Definizione 1 Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e γ_0, γ_1 circuiti in E che non è restrittivo assumere parametrizzati su uno stesso intervallo $[a, b]$. Allora γ_0 e γ_1 si dicono omotopi in E se esiste una funzione continua

$$\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E,$$

detta omotopia tra γ_0 e γ_1 , tale che

$$\varphi(t, 0) = \gamma_0(t), \quad \varphi(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad (5)$$

$$\varphi(a, \lambda) = \varphi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (6)$$

In pratica, γ_0 e γ_1 sono omotopi se riusciamo a deformare in modo continuo γ_0 fino ad ottenere γ_1 ; inoltre la funzione che fornisce la deformazione, l'omotopia φ , deve essere tale che per ogni $\lambda \in [0, 1]$ la funzione (continua) $t \mapsto \varphi(t, \lambda)$ è la parametrizzazione di un circuito. Si noti che da (6) in particolare segue che se φ è derivabile rispetto a λ per $t = a$ e $t = b$, allora

$$\partial_\lambda \varphi(a, \lambda) = \partial_\lambda \varphi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (7)$$

Esempio 2 Due circonferenze concentriche sono i sostegni di due curve omotope in $\mathbb{R}^2$. Infatti, detti $(\bar{x}, \bar{y})$ il loro centro e $R_0 < R_1$ i loro raggi, le funzioni

$$\gamma_0(t) = (\bar{x}, \bar{y}) + R_0(\cos t, \sin t), \quad \gamma_1(t) = (\bar{x}, \bar{y}) + R_1(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

sono loro parametrizzazioni. Allora un'omotopia φ tra γ_0 e γ_1 è data da

$$\varphi(t, \lambda) = (\bar{x}, \bar{y}) + [R_0 + \lambda(R_1 - R_0)](\cos t, \sin t) \quad (t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1].$$

Si noti che se P è un qualsiasi punto interno alla corona circolare individuata dalle due circonferenze, allora γ_0 e γ_1 non sono omotopi in $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$.

Il teorema che segue caratterizza gli integrali di una forma differenziale chiusa¹ lungo circuiti omotopi.

Teorema 1 Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e ω forma differenziale in E chiusa. Siano inoltre γ_0 e γ_1 circuiti omotopi in E . Allora

$$\oint_{\gamma_0} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega. \quad (8)$$

¹Ricordiamo che una forma differenziale $\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$ di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiusa (in E) se vale

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(\mathbf{x}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Dim. Per semplicità supponiamo che $n = 2$. Siano $[a, b]$ un intervallo dove γ_0 e γ_1 sono entrambe parametrizzate e $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E$ un'omotopia tra γ_0 e γ_1 , che non è restrittivo assumere di classe $\mathcal{C}^2$. Definiamo

$$I(\lambda) = \oint_{\varphi(\cdot, \lambda)} \omega,$$

cosicch 

$$I(0) = \oint_{\gamma_0} \omega, \quad I(1) = \oint_{\gamma_1} \omega.$$

Se dimostriamo che I   derivabile e $I'(\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$, possiamo allora dedurre (8). Se $\varphi(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ e $\omega = F_1 dx + F_2 dy$, si ha

$$I(\lambda) = \int_a^b F_1(\varphi(t, \lambda)) \frac{\partial}{\partial t} x(t, \lambda) dt + \int_a^b F_2(\varphi(t, \lambda)) \frac{\partial}{\partial t} y(t, \lambda) dt$$

Allora, grazie alla regolarit  $\mathcal{C}^1$ di F_1 e F_2 e alla regolarit  $\mathcal{C}^2$ di φ , per il teorema di derivazione sotto segno di integrale² si ottiene

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \int_a^b [\partial_x F_1 \partial_\lambda x(t, \lambda) + \partial_y F_1 \partial_\lambda y(t, \lambda)] \partial_t x(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_a^b [\partial_x F_2 \partial_\lambda x(t, \lambda) + \partial_y F_2 \partial_\lambda y(t, \lambda)] \partial_t y(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_a^b [F_1(\varphi(t, \lambda)) \partial_{\lambda t}^2 x(t, \lambda) + F_2(\varphi(t, \lambda)) \partial_{\lambda t}^2 y(t, \lambda)] dt. \end{aligned}$$

Poiché ω   chiusa si ha $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$, e quindi

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \int_a^b [\partial_x F_1 \partial_t x(t, \lambda) + \partial_y F_1 \partial_t y(t, \lambda)] \partial_\lambda x(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_a^b [\partial_x F_2 \partial_t x(t, \lambda) + \partial_y F_2 \partial_t y(t, \lambda)] \partial_\lambda y(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_a^b [F_1(\varphi(t, \lambda)) \partial_{\lambda t}^2 x(t, \lambda) + F_2(\varphi(t, \lambda)) \partial_{\lambda t}^2 y(t, \lambda)] dt. \end{aligned}$$

Siccome per il teorema di Schwarz valgono $\partial_{\lambda t}^2 x = \partial_{t\lambda}^2 x$ e $\partial_{\lambda t}^2 y = \partial_{t\lambda}^2 y$, si deduce che

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [F_1(\varphi(t, \lambda)) \partial_\lambda x(t, \lambda)] dt + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [F_2(\varphi(t, \lambda)) \partial_\lambda y(t, \lambda)] dt \\ &= F_1(\varphi(t, \lambda)) \partial_\lambda x(t, \lambda) \Big|_{t=a}^{t=b} + F_2(\varphi(t, \lambda)) \partial_\lambda y(t, \lambda) \Big|_{t=a}^{t=b} = 0, \end{aligned}$$

²Sia $f = f(x, y)$ funzione reale continua in $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ assieme alla sua derivata parziale rispetto ad y , $\partial_y f$. Allora la funzione $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

  derivabile e vale

$$g'(y) = \int_a^b \partial_y f(x, y) dx.$$

dove si sono sfruttate (6) e (7), da cui in particolare si ottiene

$$\partial_\lambda x(b, \lambda) = \partial_\lambda x(a, \lambda), \quad \partial_\lambda y(b, \lambda) = \partial_\lambda y(a, \lambda).$$

Il teorema è così dimostrato. $\square$

Poiché una forma differenziale ω continua su un aperto connesso E è esatta se e solo se

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

per ogni circuito semplice γ con sostegno contenuto in E , il teorema 1 suggerisce che in aperti connessi dove ogni circuito semplice è omotopo ad un punto la chiusura di una forma differenziale è equivalente all'essere esatta. Diamo allora la seguente

Definizione 2 *Un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni circuito semplice in E è omotopo ad un punto, cioè ad una curva costante.*

Per un aperto connesso E di $\mathbb{R}^2$ il fatto di essere semplicemente connesso traduce l'idea che “ E non ha buchi”. Ad esempio, si consideri il cerchio in figura 1 a cui abbiamo tolto il centro C .

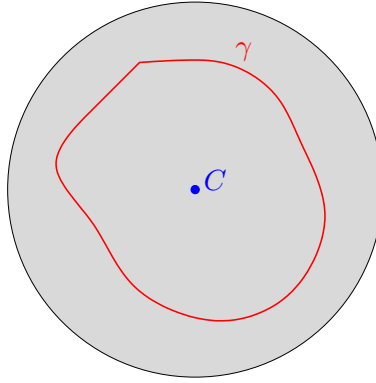


Figura 1: Insieme non semplicemente connesso

Il circuito semplice γ il cui sostegno è rappresentato nella figura contiene al suo interno l'origine. Ogni omotopia φ che deformi γ ad un punto in modo continuo deve necessariamente soddisfare $\varphi(\bar{t}, \bar{\lambda}) = C$ per qualche $(\bar{t}, \bar{\lambda})$, e dunque γ non è omotopo ad un punto (cioè il cerchio privato del suo centro non è semplicemente connesso).

L'importanza degli insiemi semplicemente connessi è contenuta nei due corollari al teorema 1 che seguono.

Corollario 1 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e ω una forma differenziale in E chiusa. Allora ω è esatta.*

Dim. Sia γ un circuito semplice in E . Allora γ è omotopo ad un punto, e quindi, essendo ω chiusa, grazie al teorema 1 vale

$$\oint_\gamma \omega = 0.$$

Per l'arbitrarietà di γ si ottiene che ω è esatta. $\square$

Corollario 2 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e ω una forma differenziale in E chiusa. Siano inoltre γ_0 e γ_1 curve in E con gli stessi estremi. Allora*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Dim. Poiché ω è chiusa in un aperto semplicemente connesso, essa è esatta e quindi l'integrale lungo una curva dipende solo dagli estremi di questa. $\square$

Esercizi

1. Si calcoli il baricentro dell'arco di ellisse le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi],$$

indicando con L la lunghezza della curva senza calcolarla.

2. Calcolare il baricentro della *cicloide*

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi],$$

dove $R > 0$ è fissato.

3. Date le forme differenziali negli aperti connessi indicati a lato

$$\omega_1 = xy^3 dx + \frac{3}{2}x^2y^2 dy \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

$$\omega_2 = y \sin(xy) dx + x \sin(xy) dy \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

$$\omega_3 = \frac{x + y - (1 + x^2) \arctan x}{(1 + x^2)(x + y)^2} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{\arctan x}{(x + y)^2} \right) dy \quad \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x \text{ e } y > 0\},$$

$$\omega_4 = \frac{xy^3[2 - x \cot(x + y)]}{\sin(x + y)} dx + \frac{x^2y^2[3 - y \cot(x + y)]}{\sin(x + y)} dy \quad \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < \pi\},$$

$$\begin{aligned} \omega_5 = 2x \frac{1 + (y + x^2)e^{\sin(y+x^2)} \cos(y + x^2)}{y + x^2} dx + \\ + \frac{1 + (y + x^2)e^{\sin(y+x^2)} \cos(y + x^2)}{y + x^2} dy \end{aligned} \quad \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x^2\},$$

$$\omega_6 = \frac{2xy}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + y^2} dx + \frac{y^2 - x^2}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + y^2} dy \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

si chiede si

1. provare che sono esatte;
 2. calcolarne un potenziale.
4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{yz(y^2 + z^2 - \alpha x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \mathbf{i} + \frac{xz(x^2 + z^2 - \alpha y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \mathbf{j} + \frac{xy(x^2 + y^2 - \alpha z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \mathbf{k}$$

un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Si determinino i valori di α per i quali $\mathbf{F}_\alpha$ è conservativo e per tali valori si calcoli un potenziale.

5. Si determini $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ per cui la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y+z}{(x-y-x)^2} dx + \frac{x}{(x-y-x)^2} dy + \frac{g(x)}{(x-y-x)^2} dz$$

risulta esatta in $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z > 0\}$. Successivamente si calcoli una funzione potenziale della forma così ottenuta.

6. Sia $\mathbf{F}_\alpha$ il campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathbf{F}_\alpha = (x^2 + y + z^3 + \alpha) e^{x^2+y+z^3} (2x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}),$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Si determini α in modo che $\mathbf{F}_\alpha$ sia conservativo.
2. Per tali valori di α si calcoli un potenziale di $\mathbf{F}_\alpha$.