

Integrali multipli e di superficie

Integrali doppi

Enunciamo e dimostriamo un paio di risultati concernenti gli integrali doppi.

Proposizione 1 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ di misura nulla e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora $f \in R(A)$ e

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 0.$$

Dim. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Poiché A è di misura nulla, esistono $Q_1, \dots, Q_{n_\varepsilon}$ rettangoli tali che

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} |Q_i| < \varepsilon.$$

Siano ora $Q = [a, b] \times [c, d] \supset A$ un rettangolo contenente tutti i rettangoli Q_i e $\tilde{f}$ l'estensione di f a Q ,

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus A. \end{cases}$$

Poiché f è limitata, esiste $M > 0$ tale che $|\tilde{f}(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$. A partire dai rettangoli Q_i , $i = 1, \dots, n_\varepsilon$, costruiamo una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q ,

$$\mathcal{D} = \{(x_\ell, y_k) : a = x_0 < x_1 < \dots < x_L = b, \ c = y_0 < y_1 < \dots < y_K = d\}$$

tale che esistano rettangoli $Q_{\ell,k} = [x_{\ell-1}, x_\ell] \times [y_{k-1}, y_k]$ per cui valga (si veda la figura 1)

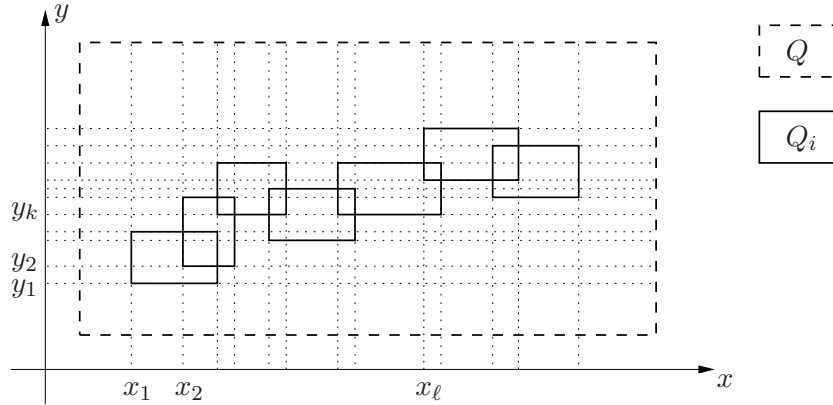


Figura 1: La suddivisione nella dimostrazione della proposizione 1

$$\bigcup_{\ell,k} Q_{\ell,k} = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} Q_i.$$

Allora

$$\begin{aligned}
-M\varepsilon &< -M \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} |Q_i| \leq \sum_{\ell,k} |Q_{\ell,k}| \inf_{Q_{\ell,k}} \tilde{f}(x,y) = s(\mathcal{D}, \tilde{f}) \leq \\
&\leq S(\mathcal{D}, \tilde{f}) = \sum_{\ell,k} |Q_{\ell,k}| \sup_{Q_{\ell,k}} \tilde{f}(x,y) \leq M \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} |Q_i| < M\varepsilon,
\end{aligned}$$

da cui discende sia l'integrabilità di $\tilde{f}$ in Q , e quindi quella di f in A , sia il fatto che l'integrale di f in A è nullo. $\square$

Teorema 1 *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ dominio normale rispetto ad uno degli assi. Allora Ω è misurabile.*

Dim. Per fissare le idee assumiamo che Ω sia normale rispetto all'asse y , cosicché esistono un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e due funzioni $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0([a, b])$ tali che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Allora la frontiera di Ω è l'insieme unione dei grafici di g_1 e g_2 , che sono di misura nulla perché le funzioni sono integrabili in $[a, b]$, e dei segmenti congiungenti i punti $(a, g_1(a))$ e $(b, g_1(b))$ rispettivamente con i punti $(a, g_2(a))$ e $(b, g_2(b))$, ed in quanto segmenti sono di misura nulla. Se ne deduce che $\partial\Omega$ è un insieme di misura nulla e quindi Ω è misurabile. $\square$

Integrali tripli per fili

Come esempio di integrazione per fili, calcoliamo il volume di una sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$. Essa è descritta da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_R(0, 0), -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\},$$

e quindi, in particolare, è un dominio normale rispetto all'asse z . Allora

$$|S|_3 = \iint_{B_R(0,0)} \left(\int_{-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} dz \right) dx dy = 2 \iint_{B_R(0,0)} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy.$$

Passando in coordinate polari nel piano si ottiene

$$|S|_3 = 2 \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Integrali tripli per strati

Il teorema che segue fornisce un metodo generale per integrare per strati in un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ indipendentemente dal fatto che D sia o no un parallelepipedo.

Teorema 2 Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ dominio di integrazione delimitato dai piani $z = a$ e $z = b$, $a < b$. Fissato $z \in [a, b]$, sia D_z la proiezione delle prime due coordinate della sezione orizzontale di quota z di D , cioè

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in D\}.$$

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e per ogni $z \in [a, b]$ la sezione D_z è misurabile, allora vale la seguente formula di integrazione per strati

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Esempio 1 Come esempio di integrazione per strati, ricalcoliamo il volume di una sfera di centro l'origine e raggio R . Detta S la sfera, essa è delimitata dai piani $z = -R$ e $z = R$. La proiezione S_z delle prime due coordinate della sezione orizzontale di quota $z \in [-R, R]$ è

$$S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 - z^2\},$$

che è un cerchio sul piano xy di centro l'origine e raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$. Allora

$$|S|_3 = \int_{-R}^R \left(\iint_{S_z} dx dy \right) dz = \int_{-R}^R |S_z|_2 dz = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Solidi di rotazione

Il volume di un solido di rotazione può essere calcolato tramite il

Teorema 3 (di Pappo) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ misurabile, contenuto nel semipiano xz con $x \geq 0$. Allora il volume del solido S generato dalla rotazione di Ω attorno all'asse z di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ è

$$|S|_3 = \alpha |\Omega|_2 x_B = \alpha \iint_{\Omega} x dx dz,$$

dove x_B è l'ascissa del baricentro di Ω .

Dim. Si osservi che in coordinate cilindriche

$$S = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : (\rho, z) \in \Omega, \varphi \in [0, \alpha]\},$$

e quindi con il teorema di cambiamento di variabile risulta

$$|S|_3 = \iiint_S dx dy dz = \int_0^\alpha \iint_{(\rho, z) \in \Omega} \rho d\rho dz = \alpha |\Omega| x_B,$$

come si voleva. □

In pratica il teorema di Pappo afferma che il volume generato dalla rotazione di un insieme misurabile $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è pari al prodotto dell'area di Ω per la lunghezza della curva percorsa dal baricentro durante la rotazione. Il teorema non vale se Ω non è interamente contenuto nel semipiano $x \geq 0$: si pensi, ad esempio, ad un insieme misurabile la cui ascissa del baricentro è nulla (si veda l'osservazione 1 sull'analogo teorema 4 di Guldino).

Esempio 2 Fissati $0 < a \leq R$, calcoliamo il volume del settore sferico generato dalla rotazione attorno all'asse z dell'insieme Ω compreso tra l'arco di circonferenza di equazione $x^2 + z^2 = R^2$ con $0 \leq x \leq a$, $z \geq 0$, e il segmento della retta di equazione $z = (\sqrt{R^2 - a^2}/a)x$ (si vedano le figure 2 e 3),

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{R^2 - a^2}/a)\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Per calcolare il volume di S , usiamo il teorema di Pappo e calcoliamo

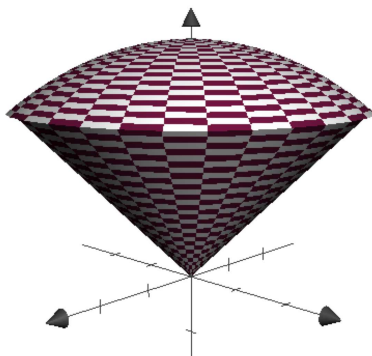


Figura 2: Il settore sferico dell'esempio 2

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x \, dx \, dz &= \int_0^a \left(\int_{(\sqrt{R^2 - a^2}/a)x}^{\sqrt{R^2 - x^2}} x \, dz \right) dx = \int_0^a x \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a}x \right) dx \\ &= -\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^a - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{3a} x^3 \Big|_0^a = \frac{1}{3} \left[R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} - \sqrt{R^2 - a^2} a^2 \right] \\ &= \frac{R^2}{3} (R - \sqrt{R^2 - a^2}) \end{aligned}$$

Allora

$$|S|_3 = \frac{2\pi}{3} R^2 (R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

Superfici di rotazione

Il teorema che segue è l'analogo del teorema di Pappo per le superfici di rotazione.

Teorema 4 (di Guldino) Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), z(t))$, curva regolare semplice contenuta nel semipiano xz tale che $x(t) > 0$ per ogni $t \in]a, b[$. Allora l'area della superficie Σ generata

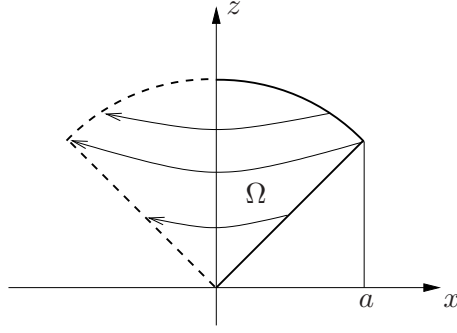


Figura 3: L'insieme Ω la cui rotazione genera il settore sferico alla figura 2

dalla rotazione del sostegno di γ attorno all'asse z di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ è

$$|\Sigma| = \alpha L(\gamma) x_B = \alpha \int_{\gamma} x \, ds, \quad (1)$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ e x_B è l'ascissa del baricentro di γ .

Dim. Se $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, una parametrizzazione di Σ è data da

$$\sigma(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi, x(t) \sin \varphi, z(t)) \quad (t, \varphi) \in [a, b] \times [0, \alpha].$$

Allora

$$\partial_t \sigma(t, \varphi) = (x'(t) \cos \varphi, x'(t) \sin \varphi, z'(t)), \quad \partial_{\varphi} \sigma(t, \varphi) = (-x(t) \sin \varphi, x(t) \cos \varphi, 0).$$

Poiché

$$\partial_t \sigma(t, \varphi) \wedge \partial_{\varphi} \sigma(t, \varphi) = -x(t) z'(t) \cos \varphi \mathbf{i} + x(t) z'(t) \sin \varphi \mathbf{j} + x(t) x'(t) \mathbf{k},$$

si ha

$$\|\partial_t \sigma(t, \varphi) \wedge \partial_{\varphi} \sigma(t, \varphi)\| = x(t) \|\gamma'(t)\| \neq 0$$

essendo γ regolare e $x(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Allora

$$|\Sigma| = \iint_{[a, b] \times [0, \alpha]} x(t) \|\gamma'(t)\| \, dt d\varphi = \alpha \int_{\gamma} x \, ds,$$

come si voleva □

Analogamente al teorema 3, il teorema di Guldino afferma che l'area della superficie generata dalla rotazione del sostegno di una curva piana γ regolare è pari al prodotto della lunghezza di γ per la lunghezza della curva percorsa dal baricentro durante la rotazione.

Osservazione 1 Si noti che il teorema 4 di Guldino in generale non vale se $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ verifica $x(t_1) < 0 < x(t_2)$ per qualche $t \in]a, b[$, cioè se l'asse attorno a cui il sostegno della curva ruota ha intersezione non vuota con il sostegno stesso. Ad esempio, il segmento che unisce i

punti $(1, 0, 1)$ e $(-1, 0, -1)$ genera con una rotazione completa attorno all'asse z una superficie conica a due falde che evidentemente non ha area nulla. Però il baricentro del segmento coincide con $(0, 0, 0)$, che non è coinvolto nella rotazione, e quindi (1) non vale. Per calcolare l'area della superficie ottenuta consideriamo i due segmenti congiungenti l'origine con $(1, 0, 1)$ e con $(-1, 0, -1)$: siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema di Guldino a ciascuna delle due superfici Σ_1 e Σ_2 ottenute. I due segmenti misurano entrambi $\sqrt{2}$ ed evidentemente i baricentri sono rispettivamente $(1/2, 0, 1/2)$ e $(-1/2, 0, -1/2)$. La superficie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ha allora area

$$|\Sigma| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2| = 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}\pi.$$

Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$

Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ è una conseguenza delle formule di Green nel piano. Innanzitutto diamo la seguente

Definizione 1 *Un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio di Green se*

1. Ω è la chiusura di un aperto connesso;
2. la frontiera di Ω è costituita dall'unione disgiunta di un numero finito di sostegni di curve di Jordan regolari a tratti, orientate in modo tale da percorrere $\partial\Omega$ tenendo Ω a sinistra;
3. Ω è decomponibile tramite un numero finito di “tagli” paralleli agli assi in un numero finito di domini semplici rispetto ad entrambi gli assi.

Ricordiamo che in un dominio di Green Ω valgono le formule di Green: se $f \in C^1(\Omega)$ allora

$$\iint_{\Omega} \partial_x f \, dxdy = \int_{\partial\Omega^+} f \, dy, \quad \iint_{\Omega} \partial_y f \, dxdy = - \int_{\partial\Omega^+} f \, dx$$

dove $\partial\Omega^+$ è la frontiera di Ω orientata come nella definizione 1. Nel seguito, dato un dominio di Green $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, indichiamo con $\mathbf{n}^e(P)$ la normale a $\partial\Omega$ esterna ad Ω in un suo punto P .

Teorema 5 (della divergenza in $\mathbb{R}^2$) *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio di Green e $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale limitato e di classe C^1 . Allora*

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}^e \rangle \, ds. \quad (2)$$

Dim. Poiché Ω è un dominio di Green, valgono le formule di Green, e quindi se $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, si ha in particolare

$$\iint_{\Omega} \partial_x F_1 \, dxdy = \int_{\partial\Omega^+} F_1 \, dy, \quad \iint_{\Omega} \partial_y F_2 \, dxdy = - \int_{\partial\Omega^+} F_2 \, dx.$$

Sommando le due formule si ottiene

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdy = \iint_{\Omega} (\partial_x F_1 + \partial_y F_2) \, dxdy = \int_{\partial\Omega^+} F_1 \, dy - F_2 \, dx. \quad (3)$$

Si ricordi ora che $\partial\Omega$ è unione disgiunta di un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti, siano esse $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, con $\gamma_j(t) = (x_j(t), y_j(t))$, $t \in [a_j, b_j]$. Allora (3) si scrive

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy &= \int_{\partial\Omega^+} F_1 \, dy - F_2 \, dx = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} F_1 \, dy - F_2 \, dx \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} [F_1(\gamma_j(t)) y'_j(t) - F_2(\gamma_j(t)) x'_j(t)] \, dt \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \langle \mathbf{F}(\gamma_j(t)), (y'_j(t), -x'_j(t)) \rangle \, dt. \end{aligned}$$

Essendo γ_j orientata in modo da lasciare Ω alla propria sinistra, il vettore $(y'_j(t), -x'_j(t))$ è un vettore normale esterno a $\partial\Omega$ (si veda la figura 4). Se ne deduce che vale

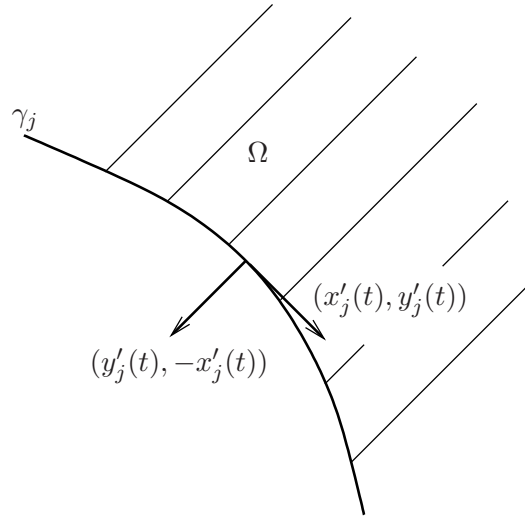


Figura 4: Normale esterna

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \langle \mathbf{F}(\gamma_j(t)), \mathbf{n}^e(\gamma_j(t)) \rangle \|\gamma'_j(t)\| \, dt,$$

e quindi (2). □

Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$

In questo paragrafo enunceremo il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ e lo dimostreremo per domini normali rispetto a tutti gli assi. Prima di tutto ci serve una definizione di dominio di Green in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 2 Un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio di Green se

1. Ω è la chiusura di un aperto connesso;
2. la frontiera di Ω è costituita dall'unione disgiunta di un numero finito di superfici ammissibili senza bordo orientabili ;
3. Ω è decomponibile tramite un numero finito di “tagli” paralleli ai piani coordinati in un numero finito di domini semplici rispetto a tutti gli assi coordinati.

Analogamente a quanto fatto per i domini di Green in $\mathbb{R}^2$, nel seguito, dato un dominio di Green $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, indichiamo con $\mathbf{n}^e(P)$ la normale a $\partial\Omega$ esterna ad Ω in un suo punto P .

Teorema 6 (della divergenza in $\mathbb{R}^3$) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green e $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale limitato e di classe $\mathcal{C}^1$. Allora

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}^e \rangle \, dS. \quad (4)$$

Dim. Dimostreremo il teorema assumendo Ω semplice rispetto a tutti gli assi. Se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e $\mathbf{n}^e = (n_1^e, n_2^e, n_3^e)$, (4) si riscrive

$$\iiint_{\Omega} [\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3] \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} (F_1 n_1^e + F_2 n_2^e + F_3 n_3^e) \, dS, \quad (5)$$

dove in tal caso $\partial\Omega$ è un'unica superficie ammissibile. Se proviamo che valgono

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \partial_x f \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f n_1^e \, dS, & \iiint_{\Omega} \partial_y f \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f n_2^e \, dS, \\ \iiint_{\Omega} \partial_z f \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f n_3^e \, dS, \end{aligned} \quad (6)$$

comunque si scelga una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$, allora prendendo $f = F_1$ nella prima uguaglianza, $f = F_2$ nella seconda e $f = F_3$ nella terza, e sommando membro a membro le tre uguaglianze così ottenute, si deduce (5). Essendo Ω normale rispetto a tutti gli assi, possiamo limitarci a provare l'ultima uguaglianza, (6). Siano allora $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e misurabile e $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Integrando per fili si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \partial_z f(x, y, z) \, dxdydz &= \iint_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \partial_z f(x, y, z) \, dz \right) \, dxdy \\ &= \iint_D [f(x, y, g_2(x, y)) - f(x, y, g_1(x, y))] \, dxdy. \end{aligned} \quad (7)$$

Si noti poi che la frontiera di Ω è composta da

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = g_1(x, y)\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = g_2(x, y)\}, \\ \Sigma_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.\end{aligned}$$

Nella parte verticale Σ_0 la terza componente del versore normale esterno $\mathbf{n}^e$ è nulla, mentre in Σ_1 e Σ_2 si ha rispettivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^e &= \frac{(\partial_x g_1, \partial_y g_1, -1)}{\sqrt{1 + (\partial_x g_1)^2 + (\partial_y g_1)^2}}, \\ \mathbf{n}^e &= \frac{(-\partial_x g_2, -\partial_y g_2, 1)}{\sqrt{1 + (\partial_x g_2)^2 + (\partial_y g_2)^2}}.\end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} f n_3^e dS &= \sum_{i=0}^2 \iint_{\Sigma_i} f n_3^e dS = \iint_{\Sigma_1} f n_3^e dS + \iint_{\Sigma_2} f n_3^e dS \\ &= - \iint_D f(x, y, g_1(x, y)) dx dy + \iint_D f(x, y, g_2(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

Confrontando quanto appena ottenuto con (7) si ottiene (6), come si voleva. $\square$

Un'applicazione del teorema della divergenza consente di dimostrare la seguente

Proposizione 2 (formula di integrazione per parti) *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ limitato e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ anch'essa di classe $\mathcal{C}^1$ e limitata. Allora*

$$\iiint_{\Omega} \langle \nabla g, \mathbf{F} \rangle = \iint_{\partial\Omega} \langle g \mathbf{F}, \mathbf{n}^e \rangle - \iiint_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (8)$$

Dim. Applichiamo il teorema della divergenza al campo vettoriale

$$\Omega \ni (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) \mathbf{F}(x, y, z).$$

Si ottiene

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(g \mathbf{F}) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle g \mathbf{F}, \mathbf{n}^e \rangle dS, \quad (9)$$

dove $\mathbf{n}^e$ indica al solito il versore normale esterno. Poiché, se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(g \mathbf{F}) &= \partial_x(g F_1) + \partial_y(g F_2) + \partial_z(g F_3) \\ &= (\partial_x g) F_1 + (\partial_y g) F_2 + (\partial_z g) F_3 + g(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) \\ &= \langle \nabla g, \mathbf{F} \rangle + g \operatorname{div} \mathbf{F},\end{aligned}$$

(8) segue immediatamente da (9). $\square$

Esercizi

1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^x \leq 2, 2 \leq xy + x \leq 3\}$. Calcolare, ricorrendo ad un opportuno cambiamento di variabili, l'integrale:

$$\iint_D e^x |xy - 1 - y| \frac{e^{2x} y^2}{x^2 (1 + y)^2} dx dy.$$

(Attenzione: verifica dell'iniettività difficile!)

2. Sia D l'insieme dei punti del secondo quadrante del piano xy soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$y - (8 - 4e^{1/2})x^2 \geq 0, \quad y - 2 \leq -e^{|x|}.$$

Determinare il volume del solido generato dalla rotazione di D attorno all'asse y .

3. Si calcoli l'area della superficie Σ parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

(Tale superficie è detta *elicoide*, si veda la figura 5)

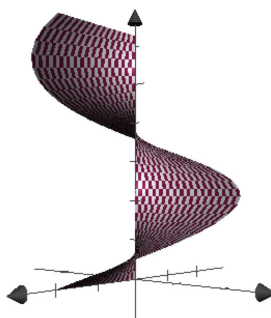


Figura 5: Elicoide

4. Si disegni la superficie Σ parametrizzata da

$$\sigma(y, \vartheta) = (\sqrt{y^2 + 1} \cos \vartheta, y, \sqrt{y^2 + 1} \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad |y| < 1,$$

e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y/2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$$

uscite da Σ , orientata in modo che nel punto $(1, 0, 0)$ il versore normale coincida con $\mathbf{i}$.

5. Si consideri il sottoinsieme Σ di $\mathbb{R}^3$ formato dall'intersezione della calotta sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$, con il cilindro $(x - 1)^2 + y^2 < 1$ (finestra di Viviani).

1. Lo si disegni e se ne dia una parametrizzazione.
 2. Si dimostri che è una superficie regolare e se ne scriva l'equazione del piano tangente e un vettore normale in $(1, 0, \sqrt{3})$.
 3. Si trovi il suo bordo, si dimostri che è una curva regolare a tratti e se ne calcoli un vettore tangente in $(1, 1, \sqrt{2})$.
 4. Si calcolino l'area e il baricentro di Σ , supponendo la densità di massa costante.
 5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{k}$ attraverso Σ , orientata in modo che il versore normale abbia prodotto scalare positivo con $\mathbf{k}$.
- 6.** Sia E l'insieme che in coordinate cilindriche è descritto da

$$E = \{(\rho, \vartheta, z) : \rho \leq (2 - z)(1 + \cos \vartheta), 0 \leq z \leq 1\}^1.$$

Si calcoli direttamente e senza usare il teoremi di Gauss e di Stokes il flusso uscente del rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$$

attraverso la superficie laterale di E .

7. Siano $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e Σ la porzione di superficie di equazione $z = xy$ con $1 \leq x \leq \sqrt{2 - y^2}$ (si veda la figura 6), orientata in modo che il versore normale abbia prodotto scalare positivo con il terzo versore $\mathbf{k}$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ .

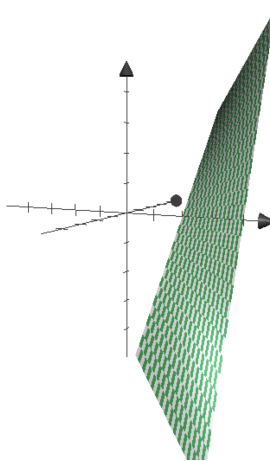


Figura 6: La superficie dell'esercizio 7

¹La curva la cui equazione polare è $\rho = a(1 + \cos \vartheta)$, con $a > 0$, è detta cardioidale.

8. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$$

lungo la circonferenza sul piano $z = 0$ di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario, sia mediante un calcolo diretto, sia usando il teorema di Stokes.

9. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{x+y} \mathbf{i} - xe^{x+y} \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

uscente dalla frontiera del solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq x \leq 2 - |y|, 0 \leq z \leq x + y\}.$$