

**Programma dell'insegnamento di Analisi Matematica 2**  
**Corsi di laurea in Fisica ed Astronomia**  
**Anno Accademico 2024/2025**

Docente: Prof. A. Marson

**Legenda:** dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

### **Serie numeriche**

Somma parziale. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Carattere e somma di una serie geometrica (D). Serie telescopiche. Carattere della somma di serie convergenti (D) e del prodotto di una serie per una costante (D). Resto parziale  $n$ -esimo. Limite del termine generale di una serie convergente (D). Criterio di Cauchy per le serie. Carattere di una serie a termini definitivamente non negativi (D). Convergenza assoluta e sua relazione con la convergenza semplice (D). Criterio del confronto (D) e corrispettivo criterio asintotico (D). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica e della serie armonica generalizzata (D). Carattere della serie  $\sum_k 1/(k^\alpha (\ln k)^\beta)$  (D). Criteri del rapporto (D) e della radice (D), loro versioni asintotiche (D). Criterio di Dirichlet. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz (D).

### **Integrali impropri**

Definizione di integrabilità in senso improprio e di integrale improprio. Integrabilità in senso improprio delle funzioni non negative. Criterio del confronto (D) e corrispettivo criterio asintotico (D). Assoluta integrabilità. Integrabilità in senso improprio delle funzioni assolutamente integrabili (D). Integrabilità in senso improprio di  $1/x^\alpha$  e di  $1/(x^\alpha |\ln x|^\beta)$ . Funzione  $\Gamma$  di Eulero. Criterio integrale per le serie. Integrali oscillanti e criterio di Abel (D).

### **Spazi metrici**

Definizione di norma, metrica, spazio normato e spazio metrico. Prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norme euclidea,  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  in  $\mathbb{R}^n$ . Palle in uno spazio metrico. Intorni di un punto. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Interno, chiusura e frontiera di un insieme. Comportamento degli aperti e dei chiusi rispetto all'unione e all'intersezione insiemistica (D). Successioni in spazi metrici e definizione di successione convergente. Successioni a valori in  $\mathbb{R}^n$  e caratterizzazione del limite tramite i limiti delle

componenti (D). Caratterizzazione di un chiuso tramite le successioni convergenti (D). Equivalenza delle norme euclidea,  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  in  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi limitati in uno spazio metrico. Limitatezza delle successioni convergenti. Intorni di  $\infty$  in  $\mathbb{R}^n$ . Successioni divergenti in  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi compatti. Chiusura e limitatezza di un insieme compatto in uno spazio metrico (D). Teorema di Heine-Borel sulla caratterizzazione dei compatti di  $\mathbb{R}^n$  (D). Insiemi connessi per archi. Componenti connesse di un insieme. Caratterizzazione degli insiemi connessi per archi in  $\mathbb{R}$  (D). Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Spazi metrici completi e spazi di Banach. Completezza di  $\mathbb{R}^n$ . Contrazione su uno spazio metrico. Lemma delle contrazioni di Banach-Caccioppoli (D). Completezza di  $\mathcal{C}_b^0(X)$ , spazio delle funzioni continue e limitate su  $X$ .

### **Limiti di funzioni in spazi metrici**

Punto di accumulazione per un insieme. Definizione di limite. Teorema di unicità del limite. Caratterizzazione del limite di una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  tramite i limiti delle componenti. Teoremi della permanenza del segno, del confronto e dei due carabinieri. Comportamento del passaggio al limite rispetto a somma, prodotto e quoziente di funzioni. Utilizzo delle coordinate polari per il calcolo di un limite di una funzione di due variabili reali.

### **Funzioni continue in uno spazio metrico**

Definizione di funzione continua. Caratterizzazione della continuità tramite le successioni. Caratterizzazione della continuità tramite l'antiimmagine di aperti. Continuità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni a valori reali continue. Compattezza dell'immagine di un compatto tramite una funzione continua (D). Teorema di Weierstrass (D). Connessione dell'immagine di un insieme connesso per archi tramite una funzione continua (D). Teorema dei valori intermedi (D).

### **Successioni e serie di funzioni**

*Successioni di funzioni.* Convergenza puntuale ed uniforme. Norma della convergenza uniforme. Puntuale convergenza di una successione uniformemente convergente (D). Continuità del limite uniforme di funzioni continue (D). Comportamento della convergenza uniforme rispetto all'integrale di Riemann (D per funzioni continue) e alla derivazione (D per funzioni  $\mathcal{C}^1$ ).

*Serie di funzioni.* Convergenza puntuale, uniforme e totale. Criterio di Weierstrass (D). Integrazione e derivazione per serie. Serie di potenze. Criterio di Hadamard (D). Serie derivata e regolarità della somma di una serie di

potenze. Cenni sulle funzioni olomorfe. Sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione olomorfa. Esponenziale e logaritmo in campo complesso.

### **Calcolo differenziale**

Derivate direzionali e parziali. Gradiente di una funzione. Regola della catena. Definizione di differenziabilità. Continuità e derivabilità di una funzione differenziabile (D). Formula del gradiente (D). Differenziabilità della composizione di funzioni differenziabili. Direzione di massima crescita. Iperpiano tangente. Teorema del differenziale totale. Teorema del valor medio (D). Derivate parziali seconde. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Formula di Taylor del secondo ordine (D). Teorema di Fermat (D). Forme quadratiche e studio del loro segno. Studio dei punti critici di una funzione con l'utilizzo della matrice hessiana (D). Differenziabilità di funzioni a valori vettoriali. Matrice jacobiana. Regola della catena per funzioni a valori vettoriali.

### **Curve e integrali curvilinei**

*Curve* Curve in  $\mathbb{R}^n$ . Curve chiuse, semplici, piane. Equazioni parametriche di una curva. Curve cartesiane. Derivabilità e vettore tangente. Curve regolari e regolari a tratti. Cambio di parametrizzazione e curve equivalenti. Equazione polare di una curva. Curve rettificabili e loro lunghezza. Invarianza della lunghezza di curve equivalenti (D). Calcolo della lunghezza di una curva  $\mathcal{C}^1$ . Lunghezza di una curva cartesiana. Integrali di prima specie. Baricentro e momento d'inerzia di una curva.

*Forme differenziali.* Forme differenziali e campi vettoriali. Integrali curvilinei di seconda specie e loro comportamento rispetto a curve equivalenti (D). Concatenazione di curve. Chiusura di una forma differenziale esatta (D) e irrotazionalità di un campo conservativo (D). Funzioni potenziale. Dipendenza dell'integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale esatta solo dai punti iniziale e finale (D). Caratterizzazione delle forme differenziali esatte mediante integrali di seconda specie (D). Circuiti omotopi. Insiemi semplicemente connessi. Invarianza di un integrale di seconda specie di una forma differenziale chiusa lungo circuiti omotopi. Teorema di Poincarè (D).