

Secondo appello

Esercizio 1

Sia H spazio di Hilbert reale separabile.

1. Si enunci il teorema di caratterizzazione di una base hilbertiana per H .
2. Si provi che H ha una base hilbertiana numerabile.

Sia ora $\mathcal{F} = \{u_n\}_{n \geq 1}$ una famiglia ortonormale numerabile in H . Sia $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali infinitesima. Sia $T : H \rightarrow H$ definito da

$$Tu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, u_j) u_j.$$

3. Provare che Tu è ben definito per ogni $u \in H$.
4. Provare che $T \in \mathcal{L}(H)$.
5. Provare che T è compatto e autoaggiunto.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Omesso.
3. Per dimostrare che la serie che definisce Tu converge in H , è sufficiente dimostrare che la successione $\{\lambda_j (u, u_j)\}_{j \geq 1}$ appartiene ad $\ell^2(\mathbb{N})$ per ogni $u \in H$. Poiché $\{(u, u_j)\}_{j \geq 1}$ appartiene ad $\ell^2(\mathbb{N})$, essendo $\mathcal{F}$ famiglia ortonormale, e posto

$$\lambda = \sup_{j \geq 1} |\lambda_j|,$$

si ha

$$|\lambda_j (u, u_j)|^2 \leq \lambda^2 |(u, u_j)|^2,$$

e si conclude.

4. La linearità di T discende dalla linearità del prodotto scalare e dal fatto che la serie che definisce Tu converge in H : se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in H$, allora

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j (\alpha u + \beta v, u_j) u_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\alpha \sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) u_j + \beta \sum_{j=1}^n \lambda_j (v, u_j) u_j \right] \\ &= \alpha Tu + \beta Tv, \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} \left| \alpha \sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) u_j + \beta \sum_{j=1}^n \lambda_j (v, u_j) u_j - \alpha Tu + \beta Tv \right| &\leq \\ &\leq |\alpha| \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) u_j - Tu \right| + |\beta| \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (v, u_j) u_j - Tv \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $n \rightarrow +\infty$. Riguardo alla continuità, si ha

$$|Tu|^2 = \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^2 |(u, u_j)|^2 \leq \lambda^2 \sum_{j \geq 1} |(u, u_j)|^2 \leq \lambda^2 |u|^2,$$

e si conclude.

5. Definiamo $T_n : H \rightarrow H$ come

$$T_n u = \sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) u_j.$$

T_n è banalmente lineare ed inoltre $T_n \in \mathcal{K}(H)$ avendo rango finito. Inoltre, se $|u| \leq 1$, si ha

$$|T_n u - Tu|^2 = \sum_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2 |(u, u_j)|^2 \leq \sup_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2 \sum_{j \geq 1} |(u, u_j)|^2 \leq |u|^2 \sup_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2,$$

da cui

$$\|T_n - T\| \leq \left[\sup_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Allora T è compatto essendo limite di operatori compatti in $\mathcal{L}(H)$. Proviamo ora che è autoaggiunto. Sfruttando la continuità del prodotto scalare rispetto alla norma di H , si ha

$$\begin{aligned} (Tu, v) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) u_j, v \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j (u, u_j) (v, u_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u, \sum_{j=1}^n \lambda_j (v, u_j) u_j \right) = (u, Tv), \end{aligned}$$

come si voleva.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il teorema di Banach-Steinhaus.
2. Siano E spazio di Banach, F spazio normato e $T_n : E \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di operatori lineari e continui. Dimostrare che $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ se e solo se per ogni serie

$$\sum_n x_n \tag{1}$$

convergente in E si ha $T_n x_n \rightarrow 0$ in F .

Svolgimento

1. Omesso.
2. Sia $M = \sup_n \|T_n\|$. Allora

$$\|T_n x_n\| \leq M \|x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

essendo (banalmente!)

$$\|x_n\| = \left\| \sum_{j=0}^n x_j - \sum_{j=0}^{n-1} x_j \right\| \rightarrow 0.$$

Viceversa, assumiamo che $T_n x_n \rightarrow 0$ per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che la serie (1) converge in E . Per assurdo, assumiamo che

$$\sup_n \|T_n\| = +\infty.$$

Per ogni $k \geq 1$ esiste un numero naturale $n_k \geq k$ tale che $\|T_{n_k}\| > k^2$. Inoltre, è possibile scegliere $n_{k+1} > n_k$. Allora, per ogni $k \geq 1$ esiste $y_{n_k} \in E$, $\|y_{n_k}\| \leq 1$, tale che

$$\|T_{n_k} y_{n_k}\| \geq k^2.$$

Sia ora

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq n_k \text{ per ogni } k \geq 1. \\ y_{n_k}/k^2 & \text{se } n = n_k \text{ per qualche } k \geq 1. \end{cases}$$

Allora

$$\sum_n \|x_n\| = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \|y_{n_k}\| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

e quindi la serie

$$\sum_n x_n$$

converge in E essendo E completo. Ma

$$\|T_{n_k}(x_{n_k})\| = \|T_{n_k}(y_{n_k}/k^2)\| \geq 1 \quad \forall k \geq 1,$$

e quindi $T_n x_n \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 3

Siano $1 < p < \infty$ e

$$W \doteq \{u \in \mathcal{C}^0([-1, 1]) : u \text{ è assolutamente continua, } u(-1) = u(1) = 0 \text{ e } u' \in L^p(-1, 1)\}.$$

1. Provare che

$$\|u\| = \left(\int_{-1}^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

definisce una norma in W e che con tale norma W è spazio di Banach.

2. Provare che se $u_n \rightharpoonup u$ in W , allora $u'_n \rightharpoonup u'$ in $L^p(-1, 1)$.

3. Sia $j : W \rightarrow L^p(-1, 1)$ l'isometria definita da $j(u) = u'$. Provare che $j(W)$ è chiuso in $L^p(-1, 1)$ e dedurre che W è riflessivo.

4. Si definisca

$$F(u) = \int_{-1}^1 |u'(t) - 1|^p dt, \quad u \in W.$$

Provare che F è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di W e dedurre che ha minimo in W .

Svolgimento

1. Una volta osservato che $\|u\| = \|u'\|_p$, per verificare che sia una norma è sufficiente provare che, se $\|u\| = 0$, allora $u \equiv 0$. Ma $\|u\| = 0$ implica $u' = 0$ q.o. e quindi

$$u(x) = \int_{-1}^x u'(t) dt = 0 \quad \forall x \in [-1, 1],$$

come si voleva. Sia ora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di Cauchy in W . Allora $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^p(-1, 1)$ e quindi converge ad una certa funzione g in $L^p(-1, 1)$. Poiché

$$0 = u_n(1) = \int_{-1}^1 u'_n(t) dt,$$

si ha

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 u'_n(t) dt = 0,$$

perché la convergenza in $L^p(-1, 1)$ implica quella in $L^1(-1, 1)$. Posto

$$u(x) = \int_{-1}^x g(t) dt, \quad x \in [-1, 1],$$

si ha allora $u \in W$ e $u_n \rightarrow u$ in W , da cui la conclusione.

2. Ci sono (almeno) due modi di procedere.

(a) Fissata $\varphi \in L^q(-1, 1)$, q esponente coniugato di p , il funzionale

$$\langle T_\varphi, u \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(t) u'(t) dt$$

è ben definito grazie alla disuguaglianza di Hölder, è banalmente lineare ed inoltre

$$|\langle T_\varphi, u \rangle| \leq \|\varphi\|_q \|u'\|_p = \|\varphi\|_q \|u\|.$$

Allora $T_\varphi \in W^*$. Se ne deduce che, se $u_n \rightharpoonup u$ in W , allora $\langle T_\varphi, u_n \rangle \rightarrow \langle T_\varphi, u \rangle$, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \varphi(t) u'_n(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi(t) u'(t) dt,$$

da cui $u'_n \rightharpoonup u'$ in $L^p(-1, 1)$, grazie alla caratterizzazione del duale topologico di $L^p(-1, 1)$ e all'arbitrarietà di $\varphi \in L^q(-1, 1)$.

- (b) Osserviamo che $j : W \rightarrow L^p(-1, 1)$ definita da $j(u) = u'$ è lineare, per la linearità della derivata, e continua, essendo

$$\|j(u)\|_p = \|u'\|_p = \|u\| \quad \forall u \in W.$$

Allora j è continua anche se muniamo W e $L^p(-1, 1)$ delle rispettive topologie deboli, e quindi se $u_n \rightharpoonup u$ in W , $j(u_n) = u'_n \rightharpoonup j(u) = u'$ in $L^p(-1, 1)$.

3. Anche qui ci sono (almeno) due modi di procedere.

- (a) Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in W e supponiamo che $j(u_n) \rightarrow g$ in $L^p(-1, 1)$. Grazie a quanto osservato sopra si ha

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = 0,$$

ed inoltre, posto

$$u(x) = \int_{-1}^x g(t) dt, \quad x \in [-1, 1],$$

si trova $g = j(u)$, da cui la chiusura di $j(W)$.

- (b) j è un'isometria e quindi manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy, e viceversa. Allora segue facilmente che $j(W)$ è chiuso, essendo W completo. Infatti, se $j(u_n) \rightarrow g$ in $L^p(-1, 1)$, allora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in W e quindi converge ad un elemento $u \in W$. Per la continuità di j necessariamente deve essere $j(u) = g$, da cui la conclusione.

Poiché $L^p(-1, 1)$ è riflessivo, perché $1 < p < \infty$, e $j(W)$ è chiuso in $L^p(-1, 1)$, allora anche $j(W)$ è spazio di Banach riflessivo. Essendo j un'isometria lineare tra due spazi di Banach, segue che $B_1^W(0)$ è debolmente compatta in W , e quindi per il teorema di Kakutani W risulta essere riflessivo.

4. Si osservi che F è un funzionale convesso, essendo tale la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - 1|^p$. Inoltre, F è continuo nella topologia forte di W perché se $u_n \rightarrow u$ in W , allora $u'_n \rightarrow u'$ in $L^p(-1, 1)$ e quindi $u'_n - 1 \rightarrow u' - 1$ in $L^p(-1, 1)$. Allora F è semicontinuo inferiormente per la topologia debole di W . Per provare che ha minimo basta verificare che i suoi sottolivelli sono limitati. In tal caso, questi sarebbero compatti nella topologia debole essendo chiusi ed essendo W uno spazio riflessivo. Fissata $C > 0$, se $F(u) \leq C$, allora

$$|\|u'\|_p - \|1\|_p| \leq \|u' - 1\|_p \leq C^{1/p},$$

da cui

$$\|u\| = \|u'\|_p \leq C^{1/p} + 1,$$

e si conclude.