Analisi Funzionale 1 - a.a. 2012/2013

Terzo appello

Esercizio 1

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathcal{C}^0([0,1])$. Provare che se $f_n \rightharpoonup f$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$, allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f puntualmente.

2. Provare che esiste una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$, limitata in $L^1(0,1)$, puntualmente convergente ad una funzione $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, ma tale che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni debolmente convergenti in $L^1(0,1)$.

3. Dedurre che esiste una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$ puntualmente convergente ad una funzione $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, ma tale che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni debolmente convergenti in $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Svolgimento

Ricordiamo preliminarmente che il duale topologico di $\mathcal{C}^0([0,1])$ è l'insieme $\mathcal{M}([0,1])$ delle misure di Radon finite su $[0,1]$.

1. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $\delta_x \in \mathcal{M}([0,1])$ la delta di Dirac concentrata in x, cosicché
$$\langle \delta_x, f\rangle = f(x) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}^0([0,1])\,.$$
Allora, se $f_n \rightharpoonup f$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$, si ha
$$f_n(x) = \langle \delta_x, f_n\rangle \to \langle \delta_x, f\rangle = f(x) \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$
come si voleva.

2. Sia
$$f_n(x) \doteq \begin{cases} n^2 x & \text{se} \quad 0 \le x < 1/n\,, \\ n^2(2/n - x) & \text{se} \quad 1/n \le x < 2/n\,, \\ 0 & \text{se} \quad 2/n \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad n \ge 1\,.$$
Allora $f_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in [0,1]$, è banalmente limitata in $L^1(0,1)$, ed inoltre soddisfa.
$$\int_0^{2/n} f_n(x)\,dx = 1 \qquad \forall\, n \ge 1\,.$$
Ma $\lambda(]0,2/n[) \to 0$ per $n \to +\infty$, e quindi $\{f_n\}_{n\ge1}$ non è equi-integrabile. Tali considerazioni restano vere per qualsiasi sottosuccessione di $\{f_n\}_{n\ge1}$. In particolare, se $\{f_n\}_{n\ge1}$ avesse una sottosuccessione debolmente convergente in $L^1(0,1)$, per il teorema di Dunford-Pettis tale sottosuccessione dovrebbe essere equi-integrabile.

3. Osserviamo preliminarmente che ogni funzione $\varphi \in L^\infty(0,1)$ individua una misura di Radon μ_φ tramite la posizione
$$\mu_\varphi(A) = \int_A \varphi(x)\,dx\,, \qquad A \subseteq [0,1]\,,\ A \text{ boreliano}\,.$$

Tale misura di Radon opera sulle funzioni continue in questo modo:

$$\langle \mu_\varphi, f \rangle = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\, dx\,, \qquad f \in \mathcal{C}^0([0,1])\,.$$

Presa la successione di cui al punto precedente, se essa avesse una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\geq 1}$ debolmente convergente in $\mathcal{C}^0([0,1])$ ad una funzione f, allora $f_{n_j} \rightharpoonup f$ in $L^1(0,1)$, perché si avrebbe

$$\int_0^1 f_{n_j}(x)\varphi(x)\, dx = \langle \mu_\varphi, f_{n_j} \rangle \to \langle \mu_\varphi, f \rangle = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in L^\infty(0,1)\,,$$

contro quanto sopra dimostrato.

È chiaro che si può provare direttamente che la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ di cui sopra non ha sottosuccessioni debolmente convergenti in $\mathcal{C}^0([0,1])$. Infatti, ogni sua sottosuccessione è illimitata essendo $\|f_n\|_\infty = n$ per ogni $n \geq 1$, e dunque non può convergere debolmente.

Esercizio 2

Siano E ed F spazi di Banach e $T \in \mathcal{L}(E,F)$ suriettivo.

1. Enunciare il teorema della mappa aperta e dimostrarne una conseguenza notevole.
2. Sia $T^* : F^* \to E^*$ l'operatore aggiunto di T. Provare che esiste $c > 0$ tale che
$$\|T^* f\|_{E^*} \geq c\|f\|_{F^*} \qquad \forall\, f \in F^*\,.$$
3. Provare che esiste $\alpha > 0$ tale che se $S \in \mathcal{L}(E,F)$ e $\|T - S\| < \alpha$, allora $\operatorname{im} S$ è densa in F.

Svolgimento

1. Omesso
2. Per il teorema della mappa aperta, esiste $c > 0$ tale che $B_c^F(0) \subseteq T(B_1^E(0))$. Allora
$$\begin{aligned}\|T^* f\|_{E^*} &= \sup_{\|x\|_E<1} \big|\, \langle x, T^* f\rangle_{E,E^*} \,\big| = \sup_{\|x\|_E<1} \big|\, \langle Tx, f\rangle_{F,F^*} \,\big| \\ &\geq \sup_{\|y\|_F<c} \big|\, \langle y, f\rangle_{F,F^*} \,\big| = c \sup_{\|y\|_F<1} \big|\, \langle y, f\rangle_{F,F^*} \,\big| = c\|f\|_{F^*}\,,\end{aligned}$$
come si voleva.
3. Sia $c > 0$ come sopra e si ponga $\alpha = c/2$. Per assurdo, supponiamo che $\overline{\operatorname{im} S} \neq F$. Allora $\overline{\operatorname{im} S}$ è un sottospazio vettoriale proprio chiuso di F, cosicché esiste $y \in B_1^F(0)$ tale che
$$\|y - Sx\|_F > 1/2 \qquad \forall\, x \in E\,.$$
Allora, posto $z = cy$, si ha $z \in B_c^F(0)$ e
$$\|z - Sx\|_F = c\|y - S(x/c)\|_F > c/2 \qquad \forall\, x \in E\,.$$
Sia ora $x \in B_1^E(0)$ tale che $Tx = z$. Si ha
$$\|Tx - Sx\|_F = \|z - Sx\|_F > c/2\,,$$
e quindi $\|T - S\| > c/2$, contro l'ipotesi che $\|T - S\| < c/2$.

Esercizio 3

Sia E spazio di Banach riflessivo e separabile con norma $\|\cdot\|_E$.

1. Sia $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq E$. Si provi che $x_k \rightharpoonup x$ se e solo se $\langle \varphi, x_k\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$ per ogni $\varphi \in E^*$.
2. Si provi che se $\{x_k\}_{k\geq 1}$ è debolmente convergente, allora è limitata.

Sia ora $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ successione densa in

$$B_{E^*} \doteq \left\{\varphi \in E^* : \|\varphi\|_{E^*} \leq 1\right\},$$

e si definisca

$$(x,y)_E \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle \varphi_n, x\rangle \langle \varphi_n, y\rangle\ , \qquad x, y \in E\,.$$

3. Si provi che $(\cdot,\cdot)_E$ definisce un prodotto scalare in E.
4. Detta $\|\cdot\|_0$ la norma indotta da $(\cdot,\cdot)_E$, si provi che vale $\|x\|_0 \leq \|x\|_E$ per ogni $x \in E$.
5. Si provi che se $x_k \rightharpoonup x$ in E, allora $\|x_k - x\|_0 \to 0$.
6. Dedurre che ogni successione limitata in E per la norma $\|\cdot\|_E$ ha una sottosuccessione di Cauchy per la norma $\|\cdot\|_0$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Omesso.
3. La simmetria segue immediatamente dalla definizione perché il prodotto in $\mathbb{R}$ è commutativo. La bilinearità è deriva dalla linerità di ciascuna φ_n e dal fatto che la serie è assolutamente convergente,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\big|\,\langle \varphi_n, x\rangle \langle \varphi_n, y\rangle\,\big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|\varphi_n\|^2_{E^*}\|x\|_E\|y\|_E \leq \|x\|_E\|y\|_E\,.$$
Inoltre si ha
$$(x,x)_E \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\big(\,\langle \varphi_n, x\rangle\,\big)^2 \geq 0\,,$$
e vale $(x,x)_E = 0$ se e solo se $\langle \varphi_n, x\rangle = 0$ per ogni $n \geq 1$. Poiché $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ è densa in B_{E^*} segue che $\langle \varphi, x\rangle = 0$ per ogni $\varphi \in B_{E^*}$, e quindi per ogni $\varphi \in E^*$, da cui $x = 0$.
4. Si ha
$$\|x\|_0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\big(\,\langle \varphi_n, x\rangle\,\big)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|\varphi_n\|^2_{E^*}\|x\|^2_E \leq \|x\|^2_E\,,$$
da cui la conclusione.
5. Poiché $x_k \rightharpoonup x$ in E, allora $\{x_k\}_{k\geq 1}$ è limitata in norma $\|\cdot\|_E$. Sia M tale che $\|x_k\|_E \leq M$ per ogni $k \geq 1$. Allora
$$\frac{1}{2^n}\big|\,\langle \varphi_n, x_k - x\rangle\,\big|^2 \leq \frac{1}{2^n}\|\varphi_n\|^2_{E^*}\big(\|x_k\|_E + \|x\|_E\big)^2 \leq \frac{1}{2^n}\big(M + \|x\|_E\big)^2\,,$$

che è il termine generale di una serie convergente. Allora si può applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che, poiché $\langle \varphi_n, x_k - x \rangle \to 0$ per $k \to +\infty$ per ogni n, si ha

$$\|x_k - x\|_0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \big(\langle \varphi_n, x_k - x \rangle \big)^2 \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty \,,$$

da cui la conclusione.

6. Essendo E riflessivo, se $\{x_k\}_{k \geq 1}$ è successione limitata, essa ammette una sottosuccessione debolmente convergente. Tale sottosuccessione è quindi di Cauchy per la norma $\| \cdot \|_0$.